Derivate parziali

Definizione 1. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

(i) Diciamo che la funzione f è derivabile nel punto $x \in \Omega$, se esistono le derivate parziali

$$\partial_{x_i} f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} ,$$

per ogni $i = 1, \dots, d$. Per le derivate parziali di f sono comunemente usate le seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Il vettore con coordinate $\partial_i f(x)$, $i = 1, \dots, d$, è detto **gradiente** *di f nel punto x*

$$\nabla f(x) := \big(\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \dots, \partial_{x_i} f(x), \dots, \partial_{x_d} f(x)\big) \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Diciamo che funzione f è derivabile in Ω, se lo è in ogni punto $x \in \Omega$.

(iii) Diciamo che la funzione f è di classe C^1, e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se f è derivabile in Ω e le sue derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono funzioni continue su Ω.

(iv) Diciamo che la funzione f è di classe C^2, e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$, se $f \in C^1(\Omega)$; per ogni $i = 1, \dots, d$ le funzioni $\partial_{x_i} f : \Omega \to \mathbb{R}$ sono derivabili in Ω e le derivate parziali $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f$ sono funzioni continue su Ω, per ogni $i = 1, \dots, d$ e $j = 1, \dots, d$.

Proposizione 2 (Operazioni algebriche con le derivate parziali)**.** *La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili. Inoltre, valgono le identita seguenti*

$$\partial_i(u + v) = \partial_i u + \partial_i v \qquad e \qquad \partial_i(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u\ .$$

Esempio 3 (Derivabile in $x \Rightarrow$ continua in x ?)**.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile in zero e tale che*

$$f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0,$$

che non sia continua in zero.

Teorema 4 (Funzioni con gradiente nullo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto connesso. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che*

$$\partial_{x_i} f(x) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega \quad \text{ed ogni} \quad i = 1, \dots, d,$$

allora f è costante in Ω.

Teorema 5 (Funzioni composte)**.** *Siano $\omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ due insiemi aperti, $x_0 \in \omega$ un punto e $F : \omega \to \Omega$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:*

- *$F(x_0) \in \Omega$;*
- *F è continua e derivabile in x_0;*
- *$u \in C^1(\Omega)$.*

Allora, la funzione composta

$$u \circ F : \omega \to \mathbb{R}$$

è derivabile in x_0 e per ogni $i = 1, \dots, d$ si ha

$$\partial_i(u \circ F)(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u\big(F(x)\big)\partial_i F_j(x).$$

Derivate parziali successive

Teorema 6 (Teorema di Schwarz)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su Ω e tale che $\partial_{ij} f$ e $\partial_{ji} f$ sono continue in x_0. Allora*

$$\partial_{ij} f(x_0) = \partial_{ji} f(x_0).$$

Dimostrazione: Supponiamo che $d = 2$ e $x_0 = (x, y)$. Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y).$$

Fissati y e k, la funzione

$$f(t) = u(t, y+k) - u(t, y)$$

è derivabile in t ed esiste $h' \in (0, h)$ tale che

$$\begin{aligned}
u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= f(x+h) - f(x) \\
&= hf'(x+h') \\
&= h\Big(\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y)\Big).
\end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Lagrange, si ha

$$\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y) = k\, \partial_y \partial_x u(x+h', y+k'),$$

per un qualche $k' \in (0, k)$. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_y \partial_x u(x, y).$$

Ora, fissiamo x e k e consideriamo la funzione

$$g(s) = u(x+h, s) - u(x, s).$$

Ora, per ogni k, esiste $k'' \in (0, k)$ tale che

$$\begin{aligned}
u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= g(y+k) - g(y) \\
&= k\, g'(y+k'') \\
&= k\Big(\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'')\Big).
\end{aligned}$$

Come sopra, esiste $h'' \in (0, h)$ tale che

$$\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'') = h\, \partial_x \partial_y u(x+h'', y+k''),$$

Quindi, per la continuità di $\partial_x \partial_y u$, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_x \partial_y u(x, y).$$

Differenziabilità e sviluppo di Taylor

Teorema del differenziale

Definizione 7 (Funzione differenziabile)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, se esiste una funzione lineare*

$$\alpha \cdot x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i$$

tale che

$$f(x+h) = f(x) + \alpha \cdot h + o(|h|). \tag{$*$}$$

Inoltre, se f è differenziabile in x, allora f è anche derivabile in x e si ha che

$$\nabla f(x) = \alpha.$$

In particolare, possiamo riscrivere $(*)$ come

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} h_i\, \partial_i f(x) + o(|h|).$$

Proposizione 8 (Differenziabile $\Rightarrow$ continua)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, allora f è continua in x.*

Teorema 9 (Teorema del differenziale)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in Ω. Se le derivate parziali $\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, sono continue in x, allora f è differenziabile in x.*

Dimostrazione: Siano $d = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $f = f(x, y)$. Allora, per ogni (h, k), esistono $h' \in (0, h)$ e $k' = (0, k)$ tali che

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) &= \Big(f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\Big) + \Big(f(x+h, y) - f(x,y)\Big) \\ &= k\, \partial_y f(x+h, y+k') + h\, \partial_x f(x+h', y). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - &f(x,y) - h\, \partial_x f(x,y) + k\, \partial_y f(x,y) \\ &= k\left(\partial_y f(x+h, y+k') - \partial_y f(x,y)\right) + h\left(\partial_x f(x+h', y) - \partial_x f(x,y)\right) \\ &= o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right). \end{aligned}$$

Differenziabilità delle funzioni composte $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Teorema 10. *Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione tale che le funzioni σ_j sono derivabili nel punto $t \in \mathbb{R}$, per ogni $j = 1, \dots, d$. Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $\sigma(t)$. Allora, si ha che la funzione $F \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in t e la sua derivata è data dal prodotto scalare*

$$(F \circ \sigma)'(t) = \sigma'(t) \cdot \nabla F(\sigma(t)),$$

dove

$$\sigma'(t) = \big(\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \dots, \sigma_d'(t)\big) \qquad e \qquad \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}\right).$$

Dimostrazione (dettagliata): Per ipotesi, σ_j è differenziabile in t, per ogni $j = 1, \dots, d$. Quindi, si ha che

$$\sigma_j(t+h) = \sigma_j(t) + \sigma_j'(t) h + \varepsilon_j(h),$$

dove la funzione $\varepsilon_j(h)$ è $o(h)$, cioè $\lim_{h \to 0} \dfrac{\varepsilon_j(h)}{h} = 0$. Possiamo scrivere queste identità, come un'unica identità vettoriale in $\mathbb{R}^d$ nel modo seguente

$$\sigma(t+h) = \sigma(t) + \sigma'(t) h + \varepsilon_\sigma(h),$$

dove la funzione $\varepsilon_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ è tale che

$$\varepsilon_\sigma(h) = \big(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h), \dots, \varepsilon_d(h)\big) := \sigma(t+h) - \sigma(t) - \sigma'(t)h.$$

In particolare, $\varepsilon_\sigma(h) = o(h)$ nel senso che

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_\sigma(h)|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\varepsilon_1(h)^2 + \cdots + \varepsilon_d(h)^2}}{h} = 0.$$

D'altra parte, siccome F è differenziabile in $\sigma(t)$, si ha che

$$F(x + \sigma(t)) = F(\sigma(t)) + \nabla F(\sigma(t)) \cdot x + \varepsilon_F\big(x\big),$$

dove la funzione (scalare) $\varepsilon_F(x)$ è $o(|x|)$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\varepsilon_F(x)|}{|x|} = 0.$$

Mettendo insieme le identità per σ e per F, abbiamo

$$\begin{aligned} F(\sigma(t+h)) &= F(\sigma(t)) + \nabla F(\sigma(t)) \cdot \big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big) + \varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big) \\ &= F(\sigma(t)) + \nabla F(\sigma(t)) \cdot \big(\sigma'(t)h + \varepsilon_\sigma(h)\big) + \varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big) \\ &= F(\sigma(t)) + \nabla F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)h + \nabla F(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h) + \varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big). \end{aligned}$$

Quindi basta dimostrare che

$$\nabla F(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h) + \varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big) = o(h). \tag{1}$$

Infatti, abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F'(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h)|}{|h|} \le \lim_{h\to 0} |F'(\sigma(t))| \frac{|\varepsilon_\sigma(h)|}{|h|} = |F'(\sigma(t))| \lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_\sigma(h)|}{|h|} = 0,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|F'(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h)| \le |F'(\sigma(t))|\, |\varepsilon_\sigma(h)|\,.$$

Ora stimiamo il termine con ε_F.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\big|\varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big)\big|}{|h|} &= \lim_{h\to 0} \frac{|\sigma(t+h) - \sigma(t)|}{|h|} \lim_{h\to 0} \frac{\big|\varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big)\big|}{|\sigma(t+h) - \sigma(t)|} \\ &= |\sigma'(t)| \lim_{h\to 0} \frac{\big|\varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big)\big|}{|\sigma(t+h) - \sigma(t)|} = 0. \end{aligned}$$

In conclusione, usando la disuguaglianza triangolare, abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\big|\nabla F(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h) + \varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big)\big|}{|h|} \le \lim_{h\to 0} \frac{\big|F'(\sigma(t)) \cdot \varepsilon_\sigma(h)\big|}{|h|} + \lim_{h\to 0} \frac{\big|\varepsilon_F\big(\sigma(t+h) - \sigma(t)\big)\big|}{|h|} = 0,$$

che dimostra (1) e conclude la dimostrazione.

Derivate direzionali

Di conseguenza, prendendo $\sigma(t) = x + t\nu$, otteniamo che se la funzione $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto $x \in \mathbb{R}^d$ e se $\nu \in \mathbb{R}^d$ è un vettore fissato, allora esiste la derivata direzionale $\partial_\nu F(x)$, definita come

$$\partial_\nu F(x) := \nu \cdot \nabla F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(x + t\nu).$$

Sviluppo di Taylor al secondo ordine

Teorema 11 (Teorema di Taylor - ordine 2). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$. Allora*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^d \partial_i f(x_0)\big(x^i - x_0^i\big) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \partial_{ij} f(x_0)\big(x^i - x_0^i\big)\big(x^j - x_0^j\big) + o\big(|x - x_0|^2\big).$$

Dimostrazione: Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega$ e $h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$. Applicare il lemma seguente alla funzione $F(t) = f(x + th)$.

Lemma 12. *Siano* $\varepsilon > 0$ *e* $F : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile due volte in* $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ *con derivata seconda continua. Allora, esiste* $\theta \in [0,1]$ *tale che*

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + (1-\theta)\Big(F''(\theta) - F''(0)\Big).$$

Dimostrazione: Considerare la funzione

$$f(t) := F(t) - F(0) + (1-t)F'(t).$$

Domande

---

(1) Funzione derivabile (in un punto, in un aperto) - definizione
(2) Funzione differenziabile (in un punto, in un aperto) - definizone
(3) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in \Omega$. È vero che f è anche continua in x? Perché?
(4) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x \in \Omega$. È vero che f è anche continua in x? Perché?
(5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Taylor al secondo ordine (in una dimensione d qualsiasi).
(6) È vero che la funzione $f(x,y) = e^{xy}$ è differenziabile in zero? Perché?
(7) Scrivere lo sviluppo al secondo ordine in zero delle funzioni $f(x,y) = e^{xy-y}$ e $f(x,y) = e^{x \sin y}$.
(8) Enunciare e dimostrare il teorema del differenziale.
(9) È vero che ogni funzione derivabile in zero è anche differenziabile in zero?
(10) È vero che se f è una funzione derivabile in un intorno dello zero, allora è anche differenziabile in zero?
(11) Calcolare le derivate parziali seconde della funzione $f(x,y) = e^x \sin(xy)$.
(12) Enunciare e dimostrare il teorema di Schwarz.
(13) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{se} \quad y \neq 0, \\ x & \text{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

Dire se è vero che :
- f è continua in zero;
- f è derivabile in zero;
- f è differenziabile in zero.

Calcolare le derivate parziali di f e dire se $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue in zero.

(14) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intorno dello zero e differenziabile in zero. È vero che le derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue in zero?

Esercizi

Esercizio 13. *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che*
$$f'(t)=0 \quad \textit{per ogni} \quad t\neq 0.$$
Dimostrare che $f'(0)=0$.

Esercizio 14. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $f'(0)=0$ e $f'(t)=1$, per ogni $t\geq 0$.*

Esercizio 15. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che ∇f è della forma*
$$\nabla f(x,y)=\big(\alpha(x,y),0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Dimostrare che f è della forma
$$f(x,y)=g(x) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 16. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(x+y^2,0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 17. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(xy,1\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 18. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(1,0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 19. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(0,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 20. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(x,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 21. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 22. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(x^2,y^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 23. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=\big(y^2,x^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 24. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che ∇f è della forma*
$$\nabla f(x,y)=\big(\alpha(x,y),0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Dimostrare che la funzione α non dipende da y.

Esercizio 25. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile su $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che esiste una funzione $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*
$$\nabla f(x,y)=g(x,y)\big(-y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Dimostrare che la funzione f è costante.

Esercizio 26 (L'esercizio precedente senza l'ipotesi di continuità)**.** *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione tale che*
$$\nabla f(x,y)=g(x,y)\big(-y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
È vero che f deve essere costante?

Esercizio 27. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione tale che*
$$\nabla f(x,y)=g(x,y)\big(x,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Dimostrare che f è costante su ogni circonferenza
$$\partial B_R=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2=R^2\big\}.$$

Esercizio 28. *Dire se esiste una funzione derivabile* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\big(x, y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 29. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \nabla f(0,0) \neq \nabla g(0,0). \end{cases}$$

Esercizio 30. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}. \end{cases}$$

Esercizio 31. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \partial B_1, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \partial B_1. \end{cases}$$

Esercizio 32. *Sia*

$$X = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \quad \textit{oppure} \quad y = 0\Big\}.$$

Dire se esistono due funzioni derivabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus X, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad X. \end{cases}$$

Esercizio 33. *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili tali che*

$$\nabla f(x, y) = \alpha(x, y) \nabla g(x, y),$$

per una qualche funzione $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. È vero che* $f = \textit{costante} \times g$ *?*

Massimi e minimi locali - dimensione uno

Definizione

Definizione 34. *Siano K un insieme di $\mathbb{R}^d$ e $x_0 \in K$.*

- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **minimo (globale)** *in x_0 se*
$$f(x_0) \le f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in K.$$
- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **massimo (globale)** *in x_0 se*
$$f(x_0) \ge f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in K.$$
- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **minimo locale** *in x_0 se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x_0) \le f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in K \cap B_r(x_0).$$
- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **massimo locale** *in x_0 se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x_0) \ge f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in K \cap B_r(x_0).$$

Esempio 35.
- *La funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ha un minimo globale in 0.*
- *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha un minimo globale in 0.*
- *La funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|^2}$ ha un minimo globale in 0.*

Massimi e minimi locali in dimensione 1

Proposizione 36. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).*
(i) Se f ha un massimo locale nel punto $t \in (a, b)$, allora $f'(t) = 0$.
(ii) Se f ha un minimo locale nel punto $t \in (a, b)$, allora $f'(t) = 0$.

Proposizione 37 (Condizione necessaria negli estremi)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in b nel senso che esiste ed è finito il limite*
$$f'(b) := \lim_{t \to b_-} \frac{f(t) - f(b)}{t - b} \qquad \textit{(derivata sinistra in } b\textit{).}$$
(i) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale in b, allora $f'(b) \ge 0$.
(ii) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un minimo locale in b, allora $f'(b) \le 0$.

Esempio 38. *La funzione $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ ha un massimo locale in $t = 1$. Calcolare $f'(1)$.*

Esempio 39. *La funzione $f : [-50, 3] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1 - (t - 3)^2$ ha un massimo locale in $t = 3$. Calcolare $f'(3)$.*

Proposizione 40 (Condizione sufficiente negli estremi)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in b (cioè esiste la derivata sinistra in b)*
(i) Se $f'(b) > 0$, allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale in b.
(ii) Se $f'(b) < 0$, allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un minimo locale in b.

Proposizione 41 (Condizione al secondo ordine - condizione necessaria)**.**
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).
(i) Se f ha un massimo locale ed è derivabile due volte nel punto $t \in (a, b)$, allora
$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) \ge 0.$$
(ii) Se f ha un minimo locale ed è derivabile due volte nel punto $t \in (a, b)$, allora
$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) \le 0.$$

Proposizione 42 (Condizione al secondo ordine - condizione sufficiente)**.**
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).
(i) Se f è derivabile due volte in $t \in (a, b)$ e
$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) > 0,$$
allora f ha un massimo locale in t.

(ii) Se f è derivabile due volte in $t \in (a,b)$ e

$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) < 0,$$

allora f ha un minimo locale in t.

Esercizio 43. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato. Quale delle seguenti condizioni garantisce l'esistenza di un massimo locale della funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nel punto b?*

(1) $f'(b) > 0$ *e* $f''(b) < 0$;
(2) $f'(b) > 0$ *e* $f''(b) > 0$;
(3) $f'(b) = 0$ *e* $f''(b) < 0$;
(4) $f'(b) = 0$ *e* $f''(b) > 0$;
(5) $f'(b) < 0$ *e* $f''(b) < 0$;
(6) $f'(b) < 0$ *e* $f''(b) > 0$.

Massimi e minimi locali - condizioni al primo ordine

Massimi, minimi e gradiente in dimensione $d \geq 2$

Teorema 44 (Condizione necessaria al primo ordine)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in Ω.
(i) Se f ha un massimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora $\nabla f(x) = 0$.
(ii) Se f ha un minimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora $\nabla f(x) = 0$.

Massimi, minimi sul bordo di un insieme regolare

Esercizio 45. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (l'ipotesi non è ottimale). Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \leq 0\}$. Dimostrare che se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale nel punto $(x,0)$, allora*

$$\partial_y f(x,0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_x f(x,0) = 0.$$

Esercizio 46. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (l'ipotesi non è ottimale). Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \leq 0\}$. Supponiamo che il punto $(0,0)$ sia tale che*

$$\partial_y f(0,0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(0,0) > 0.$$

È vero che $(0,0)$ deve essere un punto di massimo per $f : S \to \mathbb{R}$?

Esercizio 47. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (l'ipotesi non è ottimale). Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \leq 0\}$. Supponiamo che il punto $(0,0)$ sia tale che*

$$\partial_y f(0,0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(0,0) = 0.$$

È vero che $(0,0)$ deve essere un punto di massimo per $f : S \to \mathbb{R}$?

Esercizio 48. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (l'ipotesi non è ottimale). Sia $\overline{B}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \leq 0\}$. Dimostrare che:*

(1) se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale nel punto $(0,1)$, allora

$$\partial_y f(1,0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_x f(1,0) = 0 \ ;$$

(2) se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale nel punto $(1,0)$, allora

$$\partial_x f(1,0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_y f(1,0) = 0 \ ;$$

(3) se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale nel punto $A := (\alpha,\beta) \in \partial B_1$, allora

$$\alpha \partial_x f(A) + \beta \partial_y f(B) \geq 0 \qquad e \qquad -\beta \partial_x f(A) + \alpha \partial_y f(A) = 0 \ .$$

Proposizione 49. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e sia S l'insieme (detto sottografico di η)*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \leq \eta(x)\}.$$

Dimostrare che se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale nel punto $A = (\alpha, \eta(\alpha)) \in S$, allora

$$\partial_x f(A) + \eta'(\alpha) \partial_y f(A) = 0;$$
$$-\eta'(\alpha) \partial_x f(A) + \partial_y f(A) \geq 0.$$

Il vettore $\tau = \big(1, \eta'(\alpha)\big)$ si dice *tangente* al grafico della funzione η nel punto $(\alpha, \eta(\alpha))$.

Il vettore $n = \big(-\eta'(\alpha), 1\big)$ si dice *normale* (uscente da S) al grafico della funzione η nel punto $(\alpha, \eta(\alpha))$.

Nella dimostrazione della proposizione 49 è utile il lemma seguente.

Lemma 50. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la retta*

$$\sigma(t) = \big(x, \eta(x)\big) + t\big(-\eta'(x), 1\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

- *$\sigma(t) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y > \eta(x)\}$, per ogni $t \in (0, \varepsilon)$;*
- *$\sigma(t) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y < \eta(x)\}$, per ogni $t \in (-\varepsilon, 0)$.*

Massimi e minimi sul bordo di insiemi non lisci

Esercizio 51. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0, \ y \le 0\}$*. Dimostrare che se la funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(0, 0)$*, allora*

$$\partial_y f(x, 0) \ge 0 \qquad e \qquad \partial_x f(x, 0) \ge 0.$$

Esercizio 52. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0, \ y \le 0\}$*. Dimostrare che se*

$$\partial_y f(x, 0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(x, 0) > 0,$$

allora la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(0, 0)$*.*

Soluzione:

- Dimostrare che la funzione
$$u(\alpha, \beta) = \alpha \partial_x f(0, 0) + \beta \partial_y f(0, 0)$$
è continua.
- Dimostrare che l'insieme $S \cap \partial B_1$ è chiuso.
- Dedurre che u ha un minimo m strettamente positivo su $S \cap \partial B_1$.
- Dimostrare (usando il teorema di largange per la funzione $t \mapsto f(tx, ty)$) che per ogni $(x, y) \in S$ si ha
$$f(x, y) = f(0, 0) - m|(x, y)| + o(|(x, y)|).$$

Massimi e minimi locali - condizioni al secondo ordine

Condizione necessaria al secondo ordine

Definizione 53. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in Ω, e $x\in\Omega$.*

- *Diciamo che $D^2f(x)\geq 0$, se*
$$\sum_{i,j=1}^d h_ih_j\partial_{ij}f(x)\geq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{R}^d.$$
- *Diciamo che $D^2f(x)>0$, se*
$$\sum_{i,j=1}^d h_ih_j\partial_{ij}f(x)> 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{R}^d,\quad h\neq 0.$$
- *Diciamo che $D^2f(x)\leq 0$, se*
$$\sum_{i,j=1}^d h_ih_j\partial_{ij}f(x)\leq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{R}^d.$$
- *Diciamo che $D^2f(x)<0$, se*
$$\sum_{i,j=1}^d h_ih_j\partial_{ij}f(x)< 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{R}^d,\quad h\neq 0.$$

Teorema 54 (Massimi e minimi locali - condizioni necessarie)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$.

(i) Se f ha un massimo locale nel punto $x\in\Omega$, allora
$$\nabla f(x)=0 \qquad e \qquad D^2f(x)\leq 0.$$
(In particolare, $\partial_{ii}f(x)\geq 0$ per ogni $i=1,\dots,d$.)

(ii) Se f ha un minimo locale nel punto $x\in\Omega$, allora
$$\nabla f(x)=0 \qquad e \qquad D^2f(x)\geq 0.$$
(In particolare, $\partial_{ii}f(x)\leq 0$ per ogni $i=1,\dots,d$.)

Condizioni sufficienti al secondo ordine

Esercizio 55 (Due direzioni non bastano)**.** *Trovare una funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- $\partial_x f(0,0) = \partial_x f(0,0) = 0$*;*
- $\partial_{xx} f(0,0) = 1 = \partial_{xx} f(0,0)$*;*
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *non ha un minimo locale in zero.*

Teorema 56 (Massimi e minimi locali - condizioni sufficienti)**.**
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^2(\Omega)$*.*

(i) Se
$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) > 0,$$
allora f *ha un minimo locale nel punto* $x \in \Omega$*.*

(ii) Se
$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) < 0,$$
allora f *ha un massimo locale nel punto* $x \in \Omega$*.*

Teorema 57 (Il caso $d = 2$)**.** *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$*,* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^2(\Omega)$*. Allora*

(i) $D^2 f(x,y) \geq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) \geq 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x,y) \geq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) \geq 0 \ .$$

(ii) $D^2 f(x,y) > 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) > 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x,y) > 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) > 0 \ .$$

(iii) $D^2 f(x,y) \leq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) \leq 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x,y) \leq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) \geq 0 \ .$$

(iv) $D^2 f(x,y) \leq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) < 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x,y) < 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) > 0 \ .$$

Massimi e minimi locali - esercizi

Esercizio 58. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme $[0,1] \times [0,1]$ e sia A il punto $(1, y_0)$ con $0 < y_0 < 1$. Se A è un punto di massimo locale per f in D, allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\partial_x f(A) = 0$;
(b) $\partial_y f(A) = 0$;
(c) $\nabla f(A) = 0$;
(d) $\nabla f(A) \perp (1,0)$;
(e) $\nabla f(A) \perp (1,1)$;
(f) $\nabla f(A) \perp (0,1)$;
(g) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$;
(h) $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;
(i) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$ e $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;
(j) $D^2 f(A) \leq 0$.

Esercizio 59. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme $[0,1] \times [0,1]$ e sia A il punto $(1, y_0)$ con $0 < y_0 < 1$. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che A sia un punto di massimo locale per f in D?*

(a) $\partial_y f(A) = 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$;
(b) $\nabla f(A) = 0$, $\partial_x^2 f(A) < 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$;
(c) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) > 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$;
(d) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) = 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$;
(e) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) > 0$ e $\partial_x^2 f(A) < 0$;
(f) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) = 0$ e $\partial_x^2 f(A) < 0$;
(g) $\nabla f(A) = 0$ e $D^2 f(A) < 0$.

Esercizio 60. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme $[0,1] \times [0,1]$ e sia B il punto $(1,1)$. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che B sia un punto di massimo locale per f in D?*

(a) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;
(b) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) > 0$;
(c) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) > 0$ e $D^2 f(A) > 0$;
(d) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) > 0$ e $D^2 f(A) < 0$;
(e) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) \geq 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$;
(f) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) \geq 0$ e $\partial_x^2 f(A) < 0$;
(g) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) = 0$, $\partial_x^2 f(A) < 0$ e $\partial_y^2 f(A) < 0$.

Esercizio 61. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $A = (\alpha, \beta) \in \partial B_1$ un punto con coordinate $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Se A è un punto di massimo locale per f in $\overline{B}_1$, allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\nabla f(A) = 0$;
(b) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) = 0$;
(c) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;
(d) $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$;
(e) $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;
(f) $D^2 f(A) \leq 0$;
(g) $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \beta^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) \leq 0$;
(h) $\beta^2 \partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) - 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) \leq 0$.

Esercizio 62. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che il punto $A = (\alpha, \beta) \in \partial B_1$, dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sia un punto di massimo locale per f in $\overline{B}_1$?*

(a) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;
(b) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;
(c) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;
(d) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\partial_{xx} f(A) < 0$, $\partial_{yy} f(A) < 0$;
(e) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \beta^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) < 0$;

(f) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\beta^2 \partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) - 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) < 0$.

Esercizio 63. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Sia* D *l'insieme*

$$D := \left\{ (x, y) \; : \; y \leq \frac{1}{2} x^2 \right\}$$

e sia $A = (\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2) \in \partial D$. *Se* A *è un punto di massimo locale per* f *in* $\overline{B}_1$, *allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\nabla f(A) = 0$;
(b) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$;
(c) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;
(d) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) \leq 0$;
(e) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) = 0$;
(f) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;
(g) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) \leq 0$;
(h) $D^2 f(A) \leq 0$;
(i) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$ *e* $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;
(j) $\partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha \partial_{xy} f(A) \leq 0$;
(k) $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \partial_{yy} f(A) - 2\alpha \partial_{xy} f(A) \leq 0$

Teorema della funzione implicita

Teorema 64 (Teorema della funzione implicita in dimensione due)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *che contiene l'origine* $(0,0)$ *e sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^1(\Omega)$ *tale che*

$$u(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_y u(0,0) \neq 0.$$

Allora esistono $\varepsilon_0 > 0$*,* $\delta_0 > 0$ *e una funzione* $h : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to (-\delta_0, \delta_0)$*, derivabile con continuità in* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *e tale che* $h(0) = 0$*. Inoltre, il grafico di* h *coincide con l'insieme di livello*

$$\mathcal{N}_u = \Big\{(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ u(x,y) = 0\Big\},$$

cioè, se $(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0)$*, allora*

$$(x,y) \in \mathcal{N}_u \quad \textit{se e solo se} \quad y = h(x).$$

Teorema 65 (Teorema della funzione implicita in dimensione $d \geq 2$)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *che contiene l'origine e sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^1(\Omega)$ *tale che*

$$u(0) = 0 \qquad e \qquad \partial_i u(0) \neq 0.$$

Allora esistono $r_0 > 0$*,* $\delta_0 > 0$ *e una funzione* $h_i : B'_{r_0} \to (-\delta_0, \delta_0)$*, derivabile con continuità in* B'_{r_0}*, dove* B'_{r_0} *è la palla di raggio* r_0 *e centro* 0 *in* $\mathbb{R}^{d-1}$*. Inoltre,* $h_i(0) = 0$ *ed il grafico di* h_i

$$\Gamma = \Big\{(x', x_i) \in B'_{r_0} \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ x_i = h_i(x')\Big\}$$

coincide con l'insieme di livello

$$\mathcal{N}_u = \Big\{(x', x_i) \in B'_{r_0} \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ u(x', x_i) = 0\Big\}.$$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Teorema 66 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni in $C^1(\Omega)$. Sia $\mathcal{N}_g$ l'insieme*

$$\mathcal{N}_g = \Big\{x \in \Omega : \; g(x) = 0\Big\}.$$

Se $x \in \mathcal{N}_g$ è un punto di massimo (o minimo) per la funzione f sull'insieme $\mathcal{N}_g$, allora è vera una delle affermazioni seguenti :

(a) $\nabla g(x) = 0$;

(b) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$.

Esercizio 67. *Dimostrare che per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} \; .$$

Esercizio 68. *Trovare i massimi delle funzioni*

$$f(x, y, z) = xyz \; , \qquad g(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \qquad e \qquad h(x, y, z) = xy + yz + zx \; .$$

sulla sfera

$$\partial B_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

Esercizio 69. *Per ogni $a > 0$ ed ogni $b > 0$, consideriamo il rettangolo*

$$\mathcal{R}_{ab} = [0, a] \times [0, b].$$

Il perimetro e l'area di $\mathcal{R}_{ab}$ sono rispettivamente

$$\text{Per}\,(\mathcal{R}_{ab}) = 2a + 2b \qquad e \qquad \text{Area}\,(\mathcal{R}_{ab}) = ab \; .$$

Sia $P > 0$. Fra tutti i rettangoli di perimetro P trovare quello con area più grande.