Esercizi - prova scritta - simulazione

Regole e commenti:

- Il test durerà circa 60 min
- Durante il test potrete vedere un esercizio alla volta
- ... ma potrete tornare indietro e cambiare le risposte quando volete
- Per il test useremo come punto di partenza gli esercizi proposti a lezione, gli esercizi presenti sul sito del corso e gli esercizi della simulazione
- Ci saranno anche domande sulla teoria (per esempio, Esercizio 9).

Esercizio 1 (1 p.). *In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $B_2 \cap \Big((0,1) \times (0,5]\Big)$ è*

(a) *aperto*
(b) *chiuso*
(c) *compatto*
(d) *connesso per archi*
(e) *stellato rispetto al punto* $(0,3)$
(f) *stellato rispetto al pinto* $(1/2, 1)$

Esercizio 2 (1 p.). *Quali fra gli seguenti insiemi sono compatti ?*

(a) $\overline{B}_3 \cap \Big([-1,1] \times [-1,2]\Big)$
(b) $\overline{B}_3 \cup \Big([-1,1] \times [-1,2]\Big)$
(c) $\overline{B}_3 \setminus \Big([-1,1] \times [-1,2]\Big)$
(d) $\overline{B}_3 \setminus \Big((-1,1) \times (-1,2)\Big)$

Esercizio 3 (2 p.). *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Siano*

- $\overline{A}$ *la chiusura di A,*
- $\mathrm{int}(A)$ *la parte interna di A,*
- ∂A *il bordo di A.*

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *se il bordo ∂A è limitato, allora A è compatto*
(b) *se $\overline{A}$ è limitato allora $\overline{A}$ è compatto*
(c) *se A è limitato allora $\overline{A}$ è compatto*
(d) *se la parte interna $\mathrm{int}(A)$ è un insieme limitato, allora $\overline{A}$ è compatto*
(e) *se la parte interna $\mathrm{int}(A)$ e il bordo ∂A sono limitati, allora $\overline{A}$ è compatto*

Esercizio 4 (2 p.). *Quali fra le seguenti funzioni hanno gradiente in zero uguale a $(2,1)$.*

(a) $F(x,y) = xy + y\cos x + \sin(x + x^3)e^y$
(b) $F(x,y) = y\cos x + \sin(x + x^3)e^y + x\cos y$
(c) $F(x,y) = x\cos y + xy + y\cos x$
(d) $F(x,y) = \sin(x + x^3)e^y + xy + x\cos y$

Esercizio 5 (2 p.). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y^2)\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 6 (3 p.). Siano Q il quadrato $[0,3] \times [0,3]$ ed $F : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x,y) = x^4 + y^2 + 2xy - 8x - 6y$$

In quale punto la funzione $F : Q \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale ?

(a) $(1,2)$
(b) $(1,1)$
(c) $(2,2)$
(d) $(0,3)$
(e) $(3,3)$
(f) $(1,3)$

Esercizio 7 (1 p.). *Sia* D *il dominio normale*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \textit{tali che} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \textit{e} \quad x^2 \leq y \leq x$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2.

Se $F : D \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale (in* D*) nel punto* $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, *allora* <u>*necessariamente*</u>

(a) $\nabla F(P) = 0$
(b) $D^2F(P) \geq 0$
(c) $D^2F(P) \leq 0$
(d) $D^2F(P) > 0$
(e) $D^2F(P) < 0$

Esercizio 8 (2 p.). Sia D il dominio normale

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq x$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.

Se $F : D \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale (in D) nel punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, allora <u>necessariamente</u>

(a) $\nabla F(P) = 0$
(b) $(1,1) \cdot \nabla F(P) = 0$
(c) $(1,1) \cdot \nabla F(P) \leq 0$
(d) $(1,1) \cdot \nabla F(P) \geq 0$
(e) $(-1,1) \cdot \nabla F(P) = 0$
(f) $(-1,1) \cdot \nabla F(P) \geq 0$
(g) $(-1,1) \cdot \nabla F(P) \leq 0$
(h) $D^2F(P) \geq 0$
(i) $D^2F(P) \leq 0$

Esercizio 9 (1 p.). *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e siano* $a : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $b : \Omega \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1. *Sia* α *la 1-forma differenziale*

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Se* α *è esatta, allora* α *è chiusa.*
(b) *Se* α *è chiusa, allora* α *è esatta.*
(c) α *è chiusa, se e solo se è esatta.*
(d) *Se* $d\alpha = 0$, *allora* α *è esatta*
(e) *Se* $d\alpha = 0$, *allora* α *è chiusa*
(f) *Se* α *è esatta, allora* $d\alpha = 0$
(g) *Se* $d\alpha = 0$, *allora le funzioni* a *e* b *sono costanti*
(h) *La forma* $d\alpha$ *è esatta*
(i) *La forma* $d\alpha$ *è chiusa*

Esercizio 10 (2 p.). *Siano* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1 *e siano* α *e* β *le 1-forme*

$$\alpha = a(x)\, dx + b(y)\, dy$$

$$\beta = a(y)\, dx + b(x)\, dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) α *è chiusa (per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*)*
(b) β *è chiusa (per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*)*
(c) α *è esatta (per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*)*
(d) β *è esatta (per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*)*
(e) *Se* α *e* β *sono esatte, allora le funzioni* a *e* b *sono costanti.*
(f) *Se* α *e* β *sono esatte, allora le funzioni* a *e* b *sono uguali a zero.*

Esercizio 11 (2 p.). *Quali fra le seguenti forme differenziali sono chiuse.*

(a) $xy^2\, dx + yx^2\, dy$
(b) $xy\, dx + xy\, dy$
(c) $x\, dx + y\, dy$
(d) $y\, dx + x\, dy$
(e) $(x + y)\, dx + x\, dy$

Esercizio 12 (3 p.). *Sia* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva*

$$\gamma(t) = \big(2\cos t\,,\ 3\sin t\big).$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Se* α *è una 1-forma chiusa in* $\mathbb{R}^2$, *allora* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.
(b) *Se* α *è una 1-forma esatta in* $\mathbb{R}^2$, *allora* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.
(c) *Se* α *è una 1-forma esatta in* $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, *allora* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.
(d) *Se* α *è una 1-forma chiusa in* $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, *allora* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.
(e) $\displaystyle\int_\gamma \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \Big) = 0$
(f) $\displaystyle\int_\gamma \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \Big) = 2\pi$
(g) $\displaystyle\int_\gamma \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \Big) = 4\pi$

Esercizio 13 (2 p.). *Siano* $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1 *e siano* α *e* β *le* 1*-forme*

$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$
$$\beta = x\,a(x,y)\,dx + y\,b(x,y)\,dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Se* α *è chiusa, allora* β *è chiusa*
(b) *Se* α *è esatta, allora* β *è esatta*
(c) *Se* α *e* β *sono chiuse, allora* α *è esatta.*
(d) *Se* α *e* β *sono chiuse, allora* α *e* β *sono entrambe esatte.*

Esercizio 14 (2 p.). *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *gli insiemi*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y$$
$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \le x$$

Calcolare l'area A *di* $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

(a) $A = 1$
(b) $A = 3$
(c) $A = 0$
(d) $A = +\infty$
(e) $A = 1/2$
(f) $A = 1/3$
(g) $A = 1/4$
(h) $A = 2/3$
(i) $A = 3/4$

Esercizio 15 (2 p.). *Sia* B_R *la palla di centro zero e raggio* $R = \sqrt{\pi/2}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *e sia* F *la funzione*

$$F(x,y) = \cos\left(x^2 + y^2\right)$$

Calcolare l'integrale $I = \displaystyle\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy$.

(a) $I = 0$
(b) $I = \pi$
(c) $I = -\pi$
(d) $I = 2\pi$
(e) $I = -2\pi$
(f) $I = \pi/2$
(g) $I = -\pi/2$

Esercizio 16 (2 p.). *Sia* B_2 *la palla di centro zero e raggio* 2 *in* $\mathbb{R}^2$. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(x\,\cos\left(x^2+y^2\right),\ y\,\sin\left(x^2+y^2\right)\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_2} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

(a) $I = 2\pi$
(b) $I = 4\pi$
(c) $I = 8\pi$
(d) $I = 2\big(\cos 1 + \sin 1\big)$
(e) $I = 4\big(\cos 1 + \sin 1\big)$
(f) $I = 8\big(\cos 1 + \sin 1\big)$
(g) $I = 2\pi\big(\cos 1 + \sin 1\big)$
(h) $I = 4\pi\big(\cos 1 + \sin 1\big)$
(i) $I = 8\pi\big(\cos 1 + \sin 1\big)$

Esercizio 17 (2 p.). *Sia Ω l'anello $B_2 \setminus B_1$ in $\mathbb{R}^2$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione*

$$F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Calcolare

$$I = \iint_\Omega \partial_x F(x, y)\, dx\, dy.$$

(a) $I = 0$
(b) $I = \pi$
(c) $I = -\pi$
(d) $I = 2\pi$
(e) $I = -2\pi$
(f) $I = \pi/2$
(g) $I = -\pi/2$
(h) $I = 4\pi$
(i) $I = -4\pi$

Esercizio 18 (3 p.). *Sia $\mathcal{S}$ la superficie parametrica descritta dalla mappa $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dove*

$$\Phi(s, t) = \Big(2\cos t + \cos t \cos s\,,\; 2\sin t + \sin t \cos s\,,\; \sin s\Big).$$

Calcolare

$$\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = \int_\mathcal{S} 1.$$

(a) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi$
(b) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 4\pi$
(c) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 8\pi$
(d) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi^2$
(e) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 4\pi^2$
(f) $\mathrm{Area}(\mathcal{S}) = 8\pi^2$

Gli esercizi eliminati

TOPOLOGIA

Esercizio 19. *Quali fra gli seguenti insiemi sono compatti ?*

(a) $\Big((-3,3)\times(-4,3)\Big)\setminus \overline{B}_1$
(b) $\Big((-3,3)\times(-4,3)\Big)\setminus B_1$
(c) $\Big([-3,3]\times[-4,3]\Big)\setminus \overline{B}_1$
(d) $\Big([-3,3]\times[-4,3]\Big)\setminus B_1$

Esercizio 20. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Siano*

- $\overline{A}$ *la chiusura di A,*
- $\mathrm{int}(A)$ *la parte interna di A,*
- ∂A *il bordo di A.*

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *la parte interna di ∂A è precisamente* $\mathrm{int}(A)$
(b) *la parte interna di ∂A è ∂A stesso*
(c) *la parte interna di ∂A è vuota.*
(d) *la chiusura di ∂A è ∂A stesso*
(e) *la chiusura di ∂A è l'insieme vuoto*
(f) *la chiusura di ∂A è uguale a $\overline{A}$ indipendetamente dall'inisieme A*
(g) *la chiusura di ∂A è uguale a $\overline{A}$ solo se* $\mathrm{int}(A)=\emptyset$

DERIVATE PARZIALI

Esercizio 21. *Consideriamo la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$*

$$F(x,y)=\cos x+2y^2+3x\sin y+\sin(x^2y^3)$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.
(b) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.
(c) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.
(d) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.
(e) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.
(f) La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.

Esercizio 22. Quali delle seguenti funzioni hanno un minimo locale in zero ?

(a) $F(x,y)=x^2+4y^2+3xy$
(b) $F(x,y)=x^2+3y^2+2xy$
(c) $F(x,y)=\sin x\sin y$
(d) $F(x,y)=2y^2+\sin x\sin y$
(e) $F(x,y)=x^2+y^2-\sin x\sin y$

Forme differenziali

Esercizio 23. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e siano* $a : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $b : \Omega \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1. *Sia* α *la* 1*-forma differenziale*

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Se la forma* α *è chiusa e* Ω *è un aperto connesso, limitato e regolare* C^1, *allora* α *è esatta.*
(b) *Se la forma* α *è chiusa e* Ω *è un aperto stellato, allora* α *è esatta.*
(c) *Se la forma* α *è chiusa e* Ω *è un rettangolo, allora* α *è esatta.*
(d) *Se la forma* α *è chiusa e* Ω *è un aperto connesso, allora* α *è esatta.*
(e) *Se la forma* α *è chiusa e* Ω *è un aperto regolare* C^1, *allora* α *è esatta.*

Esercizio 24. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e siano* $a : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $b : \Omega \to \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1. *Siano* α *e* β *le* 1*-forme differenziali*

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$$
$$\beta = b(x, y)\, dx + a(x, y)\, dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Se* α *è chiusa, allora anche* β *è chiusa.*
(b) *Se* α *è esatta, allora anche* β *è esatta.*
(c) *Se* α *e* β *sono entrambe chiuse, allora sono anche esatte.*
(d) *Se* α *e* β *sono entrambe chiuse, allora necessariamente*

$$a(x, y) = b(x, y) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \Omega$$

(e) *Se* α *e* β *sono entrambe chiuse, allora necessariamente le funzioni* a *e* b *sono costanti su* Ω.
(f) *Se* α *e* β *sono entrambe chiuse e* Ω *è un aperto stellato, allora necessariamente le funzioni* a *e* b *sono costanti su* Ω.
(g) *Se* α *e* β *sono entrambe chiuse e* Ω *è un connesso, allora necessariamente le funzioni* a *e* b *sono costanti su* Ω.

Esercizio 25. *Siano* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva*

$$\gamma(t) = \big(\cos t\,,\ \sin t\big),$$

e α *la* 1*-forma*

$$\alpha = -\frac{xy}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dy$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 2\pi.$
(b) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0.$
(c) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -2\pi.$
(d) *La forma* α *è chiusa.*
(e) *La forma* α *è esatta in* $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Integrazione

Esercizio 26. *Per ogni $t > 0$ consideriamo l'insieme Ω_t definito come*

$$(x, y) \in \mathbb{R} \ : \ t \leq x \leq t+1 \ , \quad f(x) \leq y \leq g(x),$$

dove f e g sono le funzioni

$$f(x) = x^2 \qquad e \qquad g(x) = x - 1$$

Trovare il minimo della funzione

$$I(t) = \iint_{\Omega_t} 1 \, dx \, dy.$$

(a) $\min I = 0$
(b) $\min I = 1/6$
(c) $\min I = 1/2$
(d) $\min I = 1/3$
(e) $\min I = 5/6$
(f) $\min I = 2/3$