Convergenza assoluta. Esponenziale reale e complesso

Definizione 1. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri complessi.*

(i) Diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *converge, se converge la successione* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *delle somme parziali*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(ii) Diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *converge assolutamente, se converge la successione* $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *delle somme parziali*

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Esempio 2. *La serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ *converge e converge assolutamente.*

Esempio 3. *La serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *converge, ma NON converge assolutamente.*

Teorema 4 (convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza). *Sia* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *una serie di numeri complessi che converge assolutamente. Allora, la serie converge.*

Esercizio 5. *Sia* $z \in \mathbb{C}$ *un numero complesso. Dimostrare che la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

converge assolutamente (usare il criterio del rapporto per le serie).

In seguito useremo la notazione $E(z)$ *per il limite della serie* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

$$E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Teorema 6. *Siano* z *e* w *due numeri complessi. Allora*

$$E(z)E(w) = E(z+w).$$

Esercizio 7. *Dimostrare (per induzione) che se* $z \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, allora*

$$E(nz) = \big[E(z)\big]^n.$$

Esercizio 8. *Dimostrare che* $E(0) = 1$*. Dal Teorema 6, dedurre che per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$E(z)E(-z) = 1.$$

Usare Esercizio 7 e Teorema 6 per dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ *e* $m \in \mathbb{Z}$*, allora*

$$E(mz) = \big[E(z)\big]^m.$$

Esponenziale reale

Definizione 9. *Per ogni numero reale $a > 0$, ed ogni $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, definiamo $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$.*

Teorema 10. *Per ogni numero reale $a > 1$, esiste un unica funzione monotona crescente $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che*

$$f_a(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, per ogni numero reale $0 < a < 1$, esiste un unica funzione monotona decrescente $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$f_a(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

D'ora in poi, per ogni $a > 0$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$, useremo la notazione $f_a(x) = a^x$. Questa funzione ha le proprietà seguenti:

(i) $a^x > 0$ *per ogni* $a > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$ *per ogni* $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $y \in \mathbb{R}$;

(iii) $a^0 = 1$ *per ogni* $a > 0$;

(iv) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ *per ogni* $a > 0$ *ed ogni* $x \in \mathbb{R}$;

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$ *per ogni* $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $y \in \mathbb{R}$;

(vi) $a^x b^x = (ab)^x$ *per ogni* $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 11. *Sia $e = E(1)$.*

(i) Dimostrare che $e > 2$.

(ii) Dimostrare che $E(n) = e^n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Dimostrare che $E(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(iv) Dimostrare che $E(\frac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *ed ogni* $m \in \mathbb{Z}$;

(v) Dimostrare che la funzione $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è monotona crescente.*

Di conseguenza, mostrare che $E(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esponenziale complesso, seno e coseno

D'ora in poi useremo la notazione

$$e^z = E(z)$$

per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$.

Definizione 12. *Per ogni numero reale $\theta \in \mathbb{R}$ definiamo*

$$\cos\theta = Re(e^{i\theta}) \qquad e \qquad \sin\theta = Im(e^{i\theta}).$$

Di conseguenza,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta.$$

Esempio 13. $\cos 0 = 1$ *e* $\sin 0 = 0$.

Proposizione 14. *Siano θ e ϕ due numeri reali. Allora,*

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi$$

(Usare l'identità $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$.)

Proposizione 15. *Dimostrare che per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

(Usare la definizione di $E(i\theta)$*.)*

Proposizione 16. *Dimostrare che per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$ *si ha:*

(i) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ *e* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$*;*

(ii) $|e^{i\theta}| = 1$*;*

(iii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$*;*

Teorema 17. *Esiste un numero reale* $\pi > 0$ *(più precisamente, si ha che* $3 < \pi < 4$*) tale che:*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad e \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\begin{cases} \cos\theta > 0 \\ \sin\theta > 0 \end{cases} \qquad \textit{per ogni} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, per ogni coppia di numeri reali $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$*, tali che* $a^2 + b^2 = 1$*, esiste un unico numero reale* $\theta \in [0, \pi/2]$ *tale che*

$$a = \cos\theta \quad e \quad b = \sin\theta.$$

Proposizione 18. *Dimostrare che:*

(1) $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $e^{i\pi} = -1$*;*

(2) $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$, $e^{2i\pi} = 1$*;*

(3) $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$*;*

(4) $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$, $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$ *per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(5) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ *per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(6) $\cos(\pi/2 + \theta) = \sin\theta$, $\sin(\pi/2 + \theta) = -\cos\theta$ *per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$.

(7) Dimostrare che, per ogni coppia di numeri reali a *e* b*, tali che* $a^2 + b^2 = 1$*, esiste un unico numero reale* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tale che*

$$a = \cos\theta \quad e \quad b = \sin\theta.$$

Esercizio 19. *Sia* $z = e^{i\pi/4}$.

1. *Mostrare che* $z^2 = i$.
2. *Trovare (in forma algebrica) tutte le soluzioni dell'equazione* $z^2 = i$.
3. *Dimostrare che*

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 20. *Sia* $z = e^{i2\pi/3}$.

1. *Usando la formula,*

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1),$$

   dimostrare che $z^2 + z + 1 = 0$.

2. *Trovare (in forma algebrica) tutte le soluzioni dell'equazione* $z^2 + z + 1 = 0$.

3. *Usando il fatto che* $\pi > \frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$ *(il che vuol dire che* $\cos\frac{2\pi}{3} < 0$ *e* $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$*), mostrare che*

$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \qquad e \qquad \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. *Usando le formule*

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad e \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta,$$

dimostrare che

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. *Usando le formule*

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \qquad e \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta,$$

dimostrare che

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 21. *Si consideri i numeri complessi* $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. *Scrivere* z_1 *e* z_2 *in forma algebrica.*
2. *Scrivere in forma algebrica e forma esponenziale il prodotto* $z_1 z_2$.
3. $\sin\dfrac{\pi}{12} = ?$
4. $\cos\dfrac{\pi}{12} = ?$

Esercizio 22.

1. *Rislovere l'equazione*

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

scrivendo z *in forma algebrica come* $z = a + ib$.

2. *Scrivere il numero complesso*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

in forma esponenziale.

3. *Trovare*

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = ? \qquad e \qquad \sin(\frac{\pi}{8}) = ?$$

Esercizio 23. *Sia* $z = e^{\frac{i\pi}{5}}$.

1. *Dimostrare che*

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

2. *Usando il fatto che*

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2,$$

scrivere un'equazione di secondo grado per il numero complesso $w = z + \frac{1}{z}$.
Trovare il valore di $\cos(\frac{\pi}{5})$.