

CURVE IN \mathbb{R}^2 E \mathbb{R}^3

Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua.

- Diciamo che γ è di classe $C^1([a, b])$ se ogni componente $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^1([a, b])$, ossia se per ogni $i = 1, \dots, n$
 - γ_i è derivabile su (a, b) ;
 - esistono le derivate

$$\gamma'_i(a) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_i(a+t) - \gamma_i(a)}{t} \quad \text{e} \quad \gamma'_i(b) := \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\gamma_i(b+s) - \gamma_i(b)}{s};$$

- la funzione $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua.
- $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ è un *vettore tangente* alla curva γ nel punto $\gamma(t)$. Il vettore normalizzato

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in \mathbb{R}^n$$

è il *versore tangente* alla curva nel punto $\gamma(t)$, dove

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}.$$

- Diciamo che $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *C^1 a tratti* se γ è continua su $[a, b]$ e se esiste una partizione

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$$

tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *chiusa*, se $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *semplice*, se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva, ossia se vale

$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{per ogni} \quad t \neq s \in (a, b).$$

Per esempio, la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è semplice.

Esempio 1. *La curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è semplice, chiusa e di classe C^1 . Inoltre, il suo versore tangente è

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Infatti, abbiamo $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.

Esempio 2. *La curva*

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è chiusa, ma non è semplice.

Esempio 3. *La curva*

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è semplice, ma non chiusa. Infatti $\gamma(0) = (1, 0) \neq (-1, 0) = \gamma(\pi)$.

Esempio 4. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([a, b])$. Allora la curva*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)),$$

è di classe C^1 e parametrizza il grafico di f . La curva γ è semplice, ma non chiusa. Inoltre,

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \quad \text{e} \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

Definizione 5 (Concatenamento). *Date due curve*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad \sigma : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tali che $\gamma(b) = \sigma(b)$, definiamo il concatenamento $\gamma * \sigma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ come

$$\gamma * \sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [a, b]; \\ \sigma(t), & \text{se } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Osserviamo che se γ e σ sono C^1 a tratti, allora anche la curva $\gamma * \sigma$ lo è.

Definizione 6. *Date una curve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiamo la curva $\gamma_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ come*

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t) \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Osserviamo che se γ è C^1 a tratti, allora γ_- lo è. Inoltre,

- γ è chiusa $\Leftrightarrow \gamma_-$ è chiusa;
- γ è semplice $\Leftrightarrow \gamma_-$ è semplice;
- $\gamma'(t) = -\gamma'_-(a + b - t)$ e $|\gamma'(t)| = |\gamma'_-(a + b - t)|$ per ogni $t \in [a, b]$.

Esercizio 7. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x),$$

dove:

- (1) $f(x) = 1 - x^2, g(x) = x^4 - 1$.
- (2) $f(x) = x, g(x) = x^2 - x$.
- (3) $f(x) = e^x, g(x) = 3 - 2e^{-x}$.

Esercizio 8. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo $[1, 2] \times [3, 4]$.*

Esercizio 9. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 : y \geq 0.$$

Esercizio 10. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 : y \leq x, x \geq 0.$$

Esercizio 11. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} : g(x) < y < f(x),$$

dove:

- (1) $(a, b) = (-1, 1), f(x) = x^2 + 1, g(x) = -1 - x^2$.
- (2) $(a, b) = (0, 1), f(x) = x^2 + x, g(x) = -x^2 - x$.

Esercizio 12. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_{2\sqrt{2}} : x \geq 0, -x^2 - x \leq y \leq x^2 + x.$$

Definizione 13. *Diciamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad \sigma : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono equivalenti, se esiste una funzione $g : [a, b] \rightarrow [A, B]$ di classe $C^1([a, b])$ tale che

$$g(a) = A, \quad g(b) = B, \quad \gamma = \sigma \circ g \quad e \quad g' > 0 \quad \text{su } [a, b].$$

 INTEGRALI CURVILINEI. INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SU UNA CURVA

Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 . Definiamo l'integrale di F su γ come

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Osservazione 14. Se $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_{\gamma} (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_{\gamma} F + \beta \int_{\gamma} G.$$

Osservazione 15. Se $\sigma : [b, c] \rightarrow \Omega$ è una curva C^1 a tratti e tale che $\gamma(b) = \sigma(b)$, allora

$$\int_{\gamma * \sigma} F = \int_{\gamma} F + \int_{\sigma} F \quad e \quad \int_{\gamma^-} F = \int_{\gamma} F.$$

Osservazione 16 (L'integrale non dipende dalla parametrizzazione). Supponiamo che le curve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad \sigma : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono equivalenti. Allora $\int_{\gamma} F = \int_{\sigma} F$. Infatti, se $g : [a, b] \rightarrow [A, B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt && \text{(per definizione)} \\ &= \int_a^b F(\sigma(g(t))) |\sigma'(g(t))| g'(t) dt && \text{(qui usiamo che } g' > 0) \\ &= \int_A^B F(\sigma(s)) |\sigma'(s)| ds && \text{(cambiamo variabile: } s = g(t), ds = g'(t) dt) \\ &= \int_{\sigma} F && \text{(per definizione).} \end{aligned}$$

Integrali curvilinei e partizioni

Teorema 17. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

Se $\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k\}$ è una partizione di $[a, b]$ con $\text{diam}(\mathcal{P}) \leq \delta$, allora:

$$\left| S_{F, \gamma}(\mathcal{P}, \xi) - \int_{\gamma} F \right| \leq \varepsilon,$$

per ogni vettore $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^k$ (k è il numero di intervalli della partizione) con

$$\xi_k \in [t_{j-1}, t_j] \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, k,$$

e dove abbiamo usato $S_{F, \gamma}(\mathcal{P}, \xi)$ per indicare la somma parziale

$$S_{F, \gamma}(\mathcal{P}, \xi) := \sum_{j=1}^k F(\gamma(\xi_j)) |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|,$$

e

$$\text{diam}(\mathcal{P}) := \max_{j=1, \dots, k} |t_j - t_{j-1}|.$$

Curve rettificabili. Lunghezza di una curva

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua. Per ogni partizione

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b\}$$

definiamo

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Definizione 18. Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è rettificabile, se

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathcal{S}(\mathcal{P}) < +\infty,$$

dove il sup è su tutte le partizioni \mathcal{P} di $[a, b]$. Se γ è rettificabile, definiamo la lunghezza di γ come:

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \mathcal{S}(\mathcal{P}).$$

Lemma 19 (per esercizio). Se \mathcal{Q} è una partizione più fine di \mathcal{P} , allora $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{S}(\mathcal{Q})$.

Teorema 20. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una curva C^1 a tratti allora γ è rettificabile e

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_{\gamma} 1.$$

Esercizi

Esempio 21. Consideriamo la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Calcolare $\int_{\gamma} F$, dove $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione

- (1) $F(x, y) = 1$;
- (2) $F(x, y) = x^2$;
- (3) $F(x, y) = xy$;
- (4) $F(x, y) = ye^x$;
- (5) $F(x, y) = xf(y)$.

Esempio 22. Consideriamo la successione di curve

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t, t^n).$$

Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{lunghezza}(\gamma_n).$$

Usare solo considerazioni geometriche.