Integrali indefiniti - metodi d'integrazione

Integrali indefiniti - definizione ed esempi

Definizione 1. *Diciamo che la funzione $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ è una primitiva di $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, se F è derivabile su (a,b) e*

$$F'(x)=f(x)\quad\textit{per ogni}\quad x\in(a,b).$$

L'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\,dx$ è l'insieme di tutte le primitive di f.

Osservazione 2. *Le funzioni $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $G:(a,b)\to\mathbb{R}$ sono due primitive di $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se e solo se esiste una costante $C\in\mathbb{R}$ tale che*

$$G(x)=F(x)+C\quad\textit{per ogni}\quad x\in(a,b).$$

Si ha, per esempio, che

$$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C.$$

Proposizione 3. *Siano $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ due funzioni e sia $\alpha\in\mathbb{R}$ una costante. Allora, si ha*

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\qquad e\qquad \int\big(\alpha f(x)\big)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx.$$

Esempio 4.

$$\int(x^3+7x)\,dx=\int x^3\,dx+\int 7x\,dx=\int x^3\,dx+7\int x\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{2}x^2+C.$$

Esempi di integrali indefiniti

$$\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad\text{per ogni}\quad\alpha\neq-1\ ;\quad\int e^x\,dx=e^x+C\ ;\quad\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\ ;$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C\ ;\qquad\int\sin x\,dx=-\cos x+C\ ;\qquad\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\tan^2(x))\,dx=\tan x+C\ ;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C\ ;\quad\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C\ .$$

Metodi di integrazione
I. Cambio di variabile

Per calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$ usiamo il seguente cambio di variabile: $y=3x-1$.

(1) Usando la regola generale

$$\boxed{\text{Se } y=y(x) \text{ è la nuova variabile, allora } dy=y'(x)\,dx.}$$

calcoliamo $\quad dy=(3x-1)'\,dx=3\,dx$. In particolare, otteniamo $dx=\frac{1}{3}dy$.

(2) Sostituiamo dappertutto la variabile x:

$$\int e^{3x-1}\,dx = \int e^{y}\,\frac{1}{3}dy.$$

(3) Calcoliamo l'integrale nella nuova variabile y:

$$\int e^{y}\,\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\int e^{y}\,dy = \frac{1}{3}e^{y} + C.$$

(4) Nel risultato finale, sostituiamo dappertutto la variabile y con $3x-1$:

$$\frac{1}{3}e^{y} + C = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C.$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che

$$\int e^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{y}\,dy = \frac{1}{3}e^{y} + C = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C.$$

Esercizio 5. *Calcolare l'integrale indefinito* $\int x\cos(x^2)\,dx$.

Soluzione: Introduciamo la nuova variabile $y = x^2$.

(1) Calcoliamo

$$dy = (x^2)'\,dx = 2x\,dx.$$

Di conseguenza, si ha

$$dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

(2) Sostituiamo dappertutto la variabile x:

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \int \sqrt{y}\cos(y)\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

(3) Calcoliamo l'integrale nella nuova variabile y:

$$\int \frac{\sqrt{y}\cos y}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int \cos y\,dy = \frac{1}{2}\sin y + C.$$

(4) Nel risultato finale, sostituiamo dappertutto la variabile y con x^2:

$$\frac{1}{3}\cos y + C = \frac{1}{3}\cos(x^2) + C.$$

Infine, abbiamo ottenuto che

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos y\,dy = \frac{1}{2}\sin y + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$$

Esercizio 6. *Sia $y = y(x)$ una funzione reale definita su un qualche intervallo aperto $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Calcolare (in funzione di $y(x)$) gli integrali seguenti*

$$\int y'(x)y(x)\,dx = \int y'(x)y(x)\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{y(x)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx =$$

$$\int y'(x)e^{y(x)}\,dx =$$

$$\int y'(x)\sin y(x)\,dx =$$

$$\int y'(x)\cos y(x)\,dx =$$

$$\int y'(x)(1+\tan^2 y(x))\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}}\,dx =$$

$$\int -\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}}\,dx =$$

$$\int \frac{y(x)'}{1+y(x)^2}\,dx =$$

$$\int y(x)'y(x)\cos(y(x)^2)\,dx =$$

$$\int y'(x)e^{y(x)}\cos(e^{y(x)})\,dx =$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\cos(\ln y(x))\,dx =$$

Esercizio 7. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int (x^4 - 3x + 1)\, dx =$$

$$\int (x+1)^2\, dx =$$

$$\int (x-1)^3\, dx =$$

$$\int \sqrt{x+2}\, dx =$$

$$\int \sqrt[3]{x+1}\, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\, dx =$$

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx =$$

$$\int \sin(2x)\, dx =$$

$$\int \sin(1-x)\, dx =$$

$$\int \sin(3x-2)\, dx =$$

$$\int \cos(5x+1)\, dx =$$

$$\int e^{2x}\, dx =$$

$$\int e^{7x+3}\, dx =$$

$$\int x e^{x^2}\, dx =$$

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx =$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

Esercizio 8. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{3+27x^2} =$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} =$$

$$\int \cos x \, e^{\sin x} dx =$$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx =$$

$$\int x(x^2+1)^3 \, dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x+1)} =$$

Metodi di integrazione
II. Integrazione di funzioni razionali

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q} \ .$$

Calcoliamo $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Consideriamo i tre casi seguenti:

Caso 1. Supponiamo che l'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

abbia due soluzioni reali $a \neq b$. Usando l'identità

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) dx \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b}\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\Big(\ln|x-a| - \ln|x-b|\Big) + C = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C.
\end{aligned}$$

Caso 2. Supponiamo che l'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

abbia una sola soluzione $a \in \mathbb{R}$. Allora, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C.$$

Caso 3. Supponiamo che l'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

abbia due soluzione complesse $a + ib$ e $a - ib$. Allora,

$$\frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{(x-a-ib)(x-a+ib)} = \frac{1}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2\left(1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} \ .$$

Sia $y = \dfrac{x-a}{b}$. Usando la formula $dy = y'(x)dx$ si ottiene $dy = \dfrac{dx}{b}$. Quindi, abbiamo

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{b^2\left(1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} = \frac{1}{b^2}\int \frac{b\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{b}\arctan y + C = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$$

Esercizio 9. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} =$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+1} =$$

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+9}dx =$$

$$\int \frac{(x-3)+4}{x^2-6x+9}dx =$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx =$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}dx =$$

$$\int \frac{2-x}{x^2-2x+2}dx =$$

$$\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+2}dx =$$

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x^2+2x}{x^2-1}dx =$$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2}dx =$$

Metodi di integrazione
III. Integrazione di funzioni trigonometriche

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora, si ha

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Di conseguenza, otteniamo le formule

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big), \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big), \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big) \end{aligned}$$

Esercizio 10. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \cos(2x)\cos x\,dx, \qquad \int \sin(2x)\cos x\,dx, \qquad \int \sin(4x)\sin x\,dx, \qquad \int \cos(3x)\cos(2x)\cos x\,dx.$$

Esercizio 11. *Usando il cambio di variabile $y = \sin x$ e $y = \cos x$, calcolare gli integrali seguenti*

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx, \qquad \int \cos^3 x \sin x\,dx,$$

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sin x}\,dx.$$

Per il terzo ed il quarto integrale, utilizzare le identità

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx.$$

Esercizio 12. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \cos(2x)\,dx =$$

– –

$$\int \cos^2 x\,dx =$$

– –

$$\int \sin(3x)\sin(5x)dx =$$

– –

$$\int \cos(7x)\cos(2x)dx =$$

– –

$$\int \sin(2x)\cos(5x)dx =$$

– –

Esercizio 13. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \sin x \cos x \, dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx =$$

$$\int \sin^3 x \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx =$$

Metodi di integrazione
IV. Integrazione per parti

Teorema 14. *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b).Allora si ha*

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) \, dx.$$

Esempio 15. *Sizno $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Allora*

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 16. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int xe^x dx =$$

$$\int x \sin x \, dx =$$

$$\int \ln x \, dx =$$

$$\int \arctan x \, dx =$$

$$\int \ln^2 x \, dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx =$$

$$\int x \ln x \, dx =$$

$$\int e^x \sin x \, dx =$$

$$\int xe^{3x} dx =$$

$$\int x \cos(2x) \, dx =$$

$$\int \ln(7x) \, dx =$$

$$\int \arctan(5x) \, dx =$$

Esercizi

Esercizio 17. *Calcolare gli integrali seguenti*

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \cos(1 + \ln^2 x)\, dx =$$

$$\int \cos^3 x\, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$\int x \cos(3x)\, dx =$$

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$\int (x + 1) \sin(2x) dx =$$

$$\int x^2 \arctan x\, dx =$$
