Successioni ricorsive

Esercizio 1. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}\,, \qquad a_1 = \frac{1}{2}.$$

(1) Dimostrare che

$$0 \le a_n \le 1 \qquad \textit{per ogni} \qquad n \ge 1\,.$$

(2) Dimostrare che a_n *è monotona crescente.*

(3) Dimostrare che a_n *ammette un limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

(4) Dimostrare che $\ell = 1$.

Esercizio 2. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}\,, \qquad a_1 = \frac{1}{3}.$$

(1) Dimostrare che

$$0 \le a_n \le 1 \qquad \textit{per ogni} \qquad n \ge 1\,.$$

(2) Dimostrare che a_n *è monotona crescente.*

(3) Dimostrare che a_n *ammette un limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

(4) Dimostrare che $\ell = 1$.

Esercizio 3. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{3}\,, \qquad 0 \le a_1 \le 1.$$

(1) Dimostrare che

$$0 \le a_n \le 1 \qquad \textit{per ogni} \qquad n \ge 1\,.$$

(2) Dimostrare che a_n *è monotona decrescente.*

(3) Dimostrare che a_n *ammette un limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

(4) Dimostrare che $\ell = 0$.

Algoritmo di Erone

Esercizio 4. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)\,, \qquad a_1 \ge 1.$$

(1) Dimostrare che

$$a_n \ge 1 \qquad \textit{per ogni} \qquad n \ge 1\,.$$

(2) Dimostrare che a_n *è monotona decrescente.*

(3) Dimostrare che a_n *ammette un limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

(4) Dimostrare che $\ell = 1$.

Esercizio 5 (Algoritmo di Erone)**.** *Sia* $p > 1$ *un numero reale fissato. Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) \ , \qquad a_1 = p.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{p}.$$

Esercizio 6. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad 1 \le a_1 \le 2.$$

(1) Dimostrare che

$$1 \le a_n \le 2 \qquad \text{per ogni} \qquad n \ge 1\,.$$

(2) Dimostrare che a_n *è monotona.*

(3) Dimostrare che a_n *ammette un limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

(4) Trovare ℓ.

Esercizio 7. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad a_1 > 2.$$

Dimostrare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge e trovare il limite* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 8. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la successione definita per ricorrenza:*

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}\,, \qquad a_1 = 2.$$

Dimostrare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge e trovare il limite* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.