Successioni di numeri reali

Qui sotto troverete i teoremi che abbiamo dimostrato questa settimana.

Modulo e distanza

Definizione 1. *Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ definiamo*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposizione 2. *Il modulo ha le proprietà seguenti:*

(i) $|x| \geq 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $|x| = 0$, *se e solo se,* $x = 0$;

(iii) $|-x| = |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$;

(v) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$;

(vi) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$.

In particolare, la mappa che associa ad ogni $x, y \in \mathbb{R}$ il numero reale $|x - y|$ è una distanza, cioè ha le proprietà seguenti:

(a) $|x - y| \geq 0$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $|x - y| = 0$, *se e solo se,* $x = y$;

(c) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Successioni limitate

Definizione 3. *Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|a_n| \leq M \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 4. *Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente limitata se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ ed un numero naturale $N \geq 1$ tale che*

$$|a_n| \leq M \qquad \text{per ogni indice} \qquad n \geq N.$$

Più in generale, diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ definitivamente, se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n ha la proprietà $\mathcal{P}$ per ogni $n \geq N$.

Lemma 5. *Ogni insieme finito ammette un massimo e un minimo.*

Proposizione 6. *Una successione di numeri reali è limitata se e solo se è definitivamente limitata.*

Limite (finito) di una successione di numeri reali

Definizione 7. *Diciamo che il numero reale $a \in \mathbb{R}$ sia limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se:*

per ogni $\varepsilon > 0$
esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

Proposizione 8 (Unicità del limite)**.** *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Se i numeri reali a e b sono entrambi limiti della successione a_n, allora $a = b$.*

Proposizione 9. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se e soltanto se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.*

Proposizione 10. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $a \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ se e soltanto se $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$.*

Teorema 11 (Teorema sulle successioni monotone)**.** *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali limitata e crescente, dove*

- **limitata** *significa che esiste un numero reale $M > 0$ tale che*
$$|a_n| \leq M \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N};$$
- **crescente** *significa che*
$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Operazioni con successioni convergenti. Somma e prodotto

Lemma 12. *Ogni successione convergente è limitata.*

Proposizione 13. *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti e siano*
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad e \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Allora le successioni $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti ed il loro limiti sono dati da
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Teorema di Cauchy

Definizione 14 (Successione di Cauchy)**.** *Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, se ha la proprietà seguente:*

per ogni $\varepsilon > 0$
esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$|a_n - a_k| < \varepsilon$ per ogni $n, k \geq N$.

Lemma 15. *Ogni successione di Cauchy è limitata.*

Lemma 16. *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione limitata. Per ogni $n \geq 1$, poniamo*
$$b_n = \inf\{a_k \ : \ k \geq n\}.$$
Dimostrare che b_n è limitata e crescente.

Lemma 17. *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione limitata. Per ogni $n \geq 1$, poniamo*
$$b_n = \inf\{a_k \ : \ k \geq n\}.$$
Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $k \geq n$ tale che
$$-\varepsilon < a_k - b_n < \varepsilon.$$

Teorema 18 (Teorema di Cauchy)**.** *Ogni successione di Cauchy è convergente.*