ALGEBRA LIN.

PARTE A

1. La matrice simmetrica $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

   A: $detA = 0$ B: N.A. C: e' indefinita D: e' definita pos. E: e' definita neg.

2. Gli autovalori della seguente matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sono

   A: N.A. B: $(-2, 4)$ C: $(2, 2)$ D: $(2, -4)$ E: $(4, 2)$

3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ definito come segue $W = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 6\pi \end{bmatrix} \right\}$. Allora $dimW$ vale

   A: N.A. B: 4 C: 3 D: 2 E: 1

4. Sia $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, x^2\}$ una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 2). Allora il polinomio $1 + 2x + 3x^2$ ha le seguenti componenti (coordinate) rispetto alla base $\mathcal{B}$:

   A: $(1, -2, -3)$ B: $(1, 2, 3)$ C: N.A. D: $(-1, 2, 3)$ E: $(1, 2, -3)$

5. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di 1) l' endomorfismo cosi' definito: $Lp(x) = p(2x)$. Allora gli autovalori di L sono:

   A: $(2, 2)$ B: N.A. C: $(0, 1)$ D: $(1, 1)$ E: $(1, 2)$

6. Sia dato l' endomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove $L(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, L(e_2) = e_2 + e_3, Le_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, L(e_4) = e_4$, (dove e_1, e_2, e_3 base canonica di R^3). Allora $dim(ImL)$ vale

   A: 2 B: 0 C: 1 D: N.A. E: 4

7. Sia W lo spazio vettoriale cosi' definito $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ sol. del sistema seguente} \right\}$

   $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 10y + 5z = 0 \end{cases}$$

   Allora $dimW$ vale

   A: 3 B: N.A. C: 2 D: 0 E: 1

8. Le componenti (coordinate) del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$ sono:

   A: N.A. B: $(1, -1)$ C: $(-1, 1)$ D: $(1, 2)$ E: $(2, 1)$

9. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo tale che $L(e_1) = e_2$, $L(e_1 + e_2) = e_1 - e_2$ (dove e_1, e_2 e' la base canconica di $\mathbb{R}^2$). Gli autovalori di L sono:

   A: N.A. B: ± 1 C: $\pm\sqrt{2}$ D: $1 \pm \sqrt{2}$ E: $-1 \pm \sqrt{2}$

10. Il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vale

    A: 1 B: N.A. C: -2 D: 2 E: -1

CODICE=839790

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

15 Gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1			X		
2		X			
3			X		
4				X	
5					X
6					X
7					X
8		X			
9					X
10				X	

CODICE=839790

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 15 Gennaio 2018

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:________________________________

Esercizio 1

Dire se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e' diagonalizzabile. Motivare la risposta.

Esercizio 2

Data la matrice dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} (1+t) & 1 & 1 \\ (2+t) & (1+t^2) & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolarne il rango al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Sia data l'applicazione lineare

$$T : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^3$$

($\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ indica lo spazio dei polinomi della variabile x di grado minore o uguale a 2) definita come segue

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

Calcolare $dim(\text{Im T})$ e $dim(\text{ker T})$.

SOLUZIONI

1) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)^2$.

$\lambda = -1$ è autovalore con molt. alg. 1

$\lambda = 3$ " " 2

Resta solo da studiare la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$. Se vale 2 allora abbiamo che A è diagonalizzabile, altrimenti non lo è.

Studiamo quindi

$$\dim \operatorname{Ker} (3 I_{3\times 3} - A)$$

$$= \dim \left\{ \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \dim \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \;\middle|\; 4x + 4y + 8z = 0 \right\}.$$

È chiaro che le sol. di $4x + 4y + 8z = 0$ hanno la forma

$$\begin{vmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$$

e quindi abbiamo dim. 2 poiché $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

non sono allineati!

2) Vediamo per quali t abbiamo $\det = 0$.

$$(1+t)(1+t^2)+4t+(2+t)-2t(1+t^2)-2(1+t)-(2+t)=$$

$$=1+t+t^2+t^3+4t+2+t-2t-2t^3-2-2t-2-t=$$

$$=-t^3+t^2+t-1 = -t^2(t-1)+(t-1) = (t-1)(1-t^2)$$

Quindi se $t \neq \pm 1$ abbiamo $\det \neq 0$ e quindi la matrice ha rango 3.

Restano i casi $t=1$ e $t=-1$.

In tal caso abbiamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è facile vedere che sono entrambe di rango 2 poiché i minori fatti dalle prime due righe e dalle prime due colonne sono invertibili (come hanno $\det \neq 0$).

3)

Fissiamo la base canonica su $\mathbb{R}^3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

e la base canonica su $\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{1, x, x^2, x^3\}$

Allora rispetto a queste basi T è rappresentata

dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Quindi $\dim(\mathrm{Im}\, T) = \text{rango}(A) = 3$

poiché $\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$

Dalla relazione $\dim(\mathrm{Im}\, T) + \dim(\mathrm{Ker}\, T) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x])$

si trova

$\dim(\mathrm{Ker}\, T) = 4 - 3 = \boxed{1}$

SCRITTO DI ANALISI 2
DEL 15-01-2017

1) Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ dove

$$f(x,y) = xy \quad \text{e} \quad A = \{(x,y) \mid x^2+2y^2 \le 4\}.$$

2) Calcolare il volume di Ω dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le y \le z \le 1\}.$$

3) Dato il campo vettoriale $\vec{F} = (x, y, x-z)$

e data la parametrizzazione

$$\Phi : [0,1]\times[0,2] \ni (u,v) \longrightarrow (u+v, v, u-v)$$

calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS \quad \text{dove}$$

Σ è la superficie immagine di Φ

$\vec{\nu}$ è il versore della normale ad Σ ~~individuata~~ associata dalla param. Φ

ANALISI II

PARTE A

1. L' area di Ω dove
$$\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<4, |y|>|x|\}$$
vale:
A: N.A. B: 2π C: 4π D: π E: $\frac{1}{4}\pi$

2. Il seguente integrale $\int\int_\Omega y^2 dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} \le 1, |x|<|y|, x\cdot y>0\}$$
vale
A: N.A. B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: 2 E: $\frac{1}{4}$

3. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln[1+(x+y)]-(x+y)}{x^2+y^2}$ vale
A: -1 B: N.E. C: 1 D: 0 E: N.A.

4. Il volume di Ω dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1, x\cdot z>0\}$ vale
A: π B: $\frac{1}{3}\pi$ C: $\frac{2}{3}\pi$
D: $\frac{4}{3}\pi$ E: N.A.

5. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |x^2+|y|^3|$ nel punto $(0,0)$ vale
A: $(0,0)$ B: $(1,0)$ C: N.E. D: $(0,1)$ E: N.A.

6. Il volume di Ω dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$ vale
A: N.A. B: $\frac{2}{3}\pi$ C: $\frac{1}{4}\pi$ D: $\frac{1}{3}\pi$ E: $\frac{1}{5}\pi$

7. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)-xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^5}$ vale
A: N.E. B: 0 C: 1 D: -1 E: N.A.

8. Sia data la funzione $f(x,y) = |-\cos(xy)+1|$, allora il punto $(0,0)$ e' un punto di
A: min assoluto B: N.A. C: max assoluto D: min relativo ma non min assoluto E: sella

9. Sia data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale:
A: N.A. B: $(1,0)$ C: $(0,1)$ D: N.E. E: $(0,0)$

10. Il seguente integrale di prima specie $\int_\gamma (xy)ds$ dove $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2|x^2+y^2=1, x\cdot y>0\}$ vale:
A: $\frac{1}{2}$ B: N.A. C: π D: 1 E: 2

CODICE=837124

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

15 Gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	●	○

CODICE=837124

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 15 Gennaio 2018

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1
Calcolare $Max_A f$ e $Min_A f$ dove

$$f(x,y) = xy \text{ ed } A = \{(x,y)|x^2 + 2y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 2
Sia data la superficie M parametrizzata come segue

$$\Phi : [0,1] \times [0,2] \ni (u,v) \to (u+v, v, u-v)$$

e sia dato il campo $\vec{F} = (x, y, x-z)$. Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_M \vec{F} \cdot \vec{\nu} dS$$

dove $\vec{\nu}$ e' il versore della direzione normale ad M associato alla parametrizzazione Φ.

Esercizio 3
Calcolare il volume di Ω dove

$$\Omega = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}.$$

SOL. ESERCIZI

1) $\nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Si osserva subito che $(0,0)$ non è né max né min poiché xy su A assume sia valori positivi che negativi.

Sul bordo usiamo la parametr.

$$[0,2\pi] \ni t \xrightarrow{\varphi} (2\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t)$$

quindi $f \circ \varphi(t) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\cos t = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2t)$, $t \in [0,2\pi]$

da cui $\max f = \sqrt{2}$ e $\min f = -\sqrt{2}$

2) Calcoliamo $\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= i(-1) + j(1+1) + k(1)$$

$$\Rightarrow \partial_u \phi \wedge \partial_v \phi = (-1, 2, 1).$$

Quindi l'integrale si riduce a

$$\int_0^1 \int_0^2 ((u+v), v, 2v) \cdot \frac{(-1,2,1)}{\|\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi\|} \|\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi\| \, du\, dv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^2 (-u - v + 2v + 2v)\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^2 (3v - u)\, dv = \int_0^1 du\, (6 - 2u) =$$

$$= 6 - 1 = \boxed{5}$$

3) Usiamo metodo di sezioni

$$\iiint_{\Omega} 1\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \left(\int_{A_z} dx\,dy \right)$$

dove $A_z = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le y \le z \}$

$$\Rightarrow \int_{A_z} dx\,dy = \text{Area}(A_z) = \frac{1}{2} z^2$$

Quindi il volume cercato vale

$$\int_0^1 \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{6} \left[z^3 \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$