LA VERBALIZZAZIONE E

GLI EVENTUALI ORALI

SONO FISSATI PER

VENERDI 23 SETTEMBRE

ALLE ORE 9.30 PRESSO

LO STUDIO 210 AL

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

HANNO SUPERATO LO SCRITTO DEL

16-09-2016 DI ANALISI 2

I SEGUENTI CANDIDATI

1) 505097 / 22
2) 534157 / 26
3) 469292 / 20
4) 516307 / 23
5) 531365 / 20
6) 537285 / 30
7) 524367 / 22
8) 469763 / 20
9) 533348 / 21
10) 491658 / 20
11) 532269 / 23
12) 523957 / 28
13) 533147 / 18
14) 533868 / 27
15) 536405 / 25
16) 491236 / 20
17) 530506 / 29
18) 538457 / 24
19) 518677 / 25
20) 523765 / 21
21) 526570 / 24
22) 536859 / 19
23) 532152 / 19
24) 505584 / 19

PARTE A

1. Il flusso del campo $F(x,y,z) = (-\cos(z)e^{\sin z}x, \cos(z)e^{\sin z}y, z)$ lungo il bordo di Ω orientato secondo la normale esterna, dove Ω e' l'insieme ottenuto ruotando intorno all'asse z il triangolo T individuato nel piano (x,z) dai vertici $(1,0),(0,1),(0,-1)$, vale:

   A: $\frac{\pi}{6}$ B: $\frac{\pi}{3}$ C: π D: $\frac{2\pi}{3}$
   E: N.A.

2. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin(xy)$. Allora il punto $(0,0)$ e'

   A: min locale B: N.A. C: punto di sella D: max locale E: min assoluto

3. La seguente derivata

$$\frac{\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} f(0,0),$$

   dove $f(x,y) = \cos(e^{xy} - 1)$ vale:

   A: 2 B: N.A. C: 1 D: -2 E: 3

4. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ vale:

   A: N.E. B: -1 C: 1 D: N.A. E: 4

5. L' integrale

$$\int\int\int_A \ln(xyz)dxdydz$$

   dove $A = [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$ vale

   A: $5\ln 2 - 1$ B: 6 C: $3\ln 2 - 4$ D: $6\ln 2 - 3$ E: N.A.

6. Consideriamo $f(x,y) = \cos(xy)\sqrt{x^2+y^4}$. Allora il gradiente di f nel punto $(0,0)$ vale:

   A: $(0,1)$ B: $(1,0)$ C: N.A. D: $(0,0)$ E: N.E.

7. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ vale:

   A: $N.E.$ B: -1 C: 1 D: $\frac{1}{2}$ E: N.A.

8. L' integrale di prima specie $\int_\gamma x ds$, dove la curva γ e' descritta in coordinate polari da

$$\theta : [0,\pi/2] \ni \theta \to \rho(\theta) = \sin\theta$$

   vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: 3 C: N.A. D: 1 E: 2

9. L' integrale seguente $\int\int_A xydxdy$ dove

$$A = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x\cdot y \ge 0\}$$

   vale:

   A: 1 B: N.A. C: $\frac{1}{4}$ D: $\frac{1}{3}$ E: 2

10. Il seguente integrale $\int\int\int_A (\sin x \sin y \sin z \cos x \cos y \cos z)dxdydz$ dove

$$A = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$$

   vale:

   A: $\frac{1}{8}$ B: N.A. C: $\frac{1}{25}$ D: $\frac{1}{27}$ E: $\frac{1}{12}$

CODICE=400250

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

16 settembre 2016

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=400250

COMPITO ANALISI II 16-09-2016

1) Trovare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = y^3 e^{xy+x}$$

e studiarne la natura (max loc., min. loc., sella)?

2) Studiare il flusso del campo

$$(x^2, y^2, z^2)$$

lungo il bordo di Ω orientato secondo la normale esterna, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$$

3) Calcolare $vol(\Omega)$ dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$$

Sol. Es. 1

Calcoliamo

$$\partial_x f = (y^3 + y^4)\, e^{xy+x}$$

$$\partial_y f = (3y^2 + xy^3)\, e^{xy+x}$$

quindi $\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} y^3 + y^4 = 0 \\ 3y^2 + xy^3 = 0 \end{cases}$.

Con semplici calcoli troviamo che le sol. del sistema sono:

$$(3,-1) \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Studiamo la natura del punto $(3,-1)$ calcolando la matrice Hessiana:

$$\partial_x^2 f = (y^3 + y^4)(y+1)\, e^{xy+x}$$

$$\partial_y^2 f = \left[6y + 3xy^2 + x(3y^2 + xy^3)\right] e^{xy+x} =$$

$$= (6y + 6xy^2 + x^2y^3)\, e^{xy+x}$$

$$\partial_{xy}^2 f = \left[3y^2 + 4y^3 + x(y^3 + y^4)\right] e^{xy+x}$$

$$= \left[3y^2 + 4y^3 + xy^3 + xy^4\right] e^{xy+x}$$

Possiamo quindi calcolare

$$Hf(3,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi si tratta di punto di sella poiché

$\det Hf(3,-1) = -1 < 0$.

Per studiare la natura dei punti $(x,0)$ il test dell'Hessiano non è efficace poiché

$$Hf(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi } \det Hf(x,0) = 0.$$

Per studiare la natura dei punti $(x,0)$ osserviamo che il segno della funzione

$$f(x,y) = y^3 e^{xy+x}$$

è dato dal segno della funzione y^3 e quindi nei punti (x,ϵ) la f è positiva e nei punti $(x,-\epsilon)$ la f è negativa, quindi abbiamo dei punti di sella.

Sol. Es. 2 Usando il teorema della divergenza dobbiamo calcolare

$$\iiint_\Omega 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz \; .$$

Osserviamo che Ω può essere descritto come:

$$\{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

quindi integrando per fili

$$\iint_{\left\{\substack{x\geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}\right\}} 2\int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(x+y)(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right] =$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[x+y-(x+y)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+y)^2 - (x+y)\right] dy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\left[1-(x+y)^2\right] dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(1-x^2-y^2-2xy\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[1-x-x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 - x(1-x)^2\right]$$

$$= \int_0^1 dx \left[1-x-x^2+x^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3 + x - x^2 - x - x^3 + 2x^2\right]$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{2}{3} - x + \frac{1}{3}x^3 \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{8-6+1}{12} = \frac{1}{4}$$

Sol. Es. 3 Usiamo l'integrazione per sezioni ed osserviamo che la sezione di Ω a z fissato è non vuota se e solo se $2z - z^2 \geq 0 \iff z \in [0,2]$.

Inoltre per gli z t.c. che

$$z^2 \leq 2z - z^2 \iff z^2 \leq z \iff z \in [0,1]$$

si ha che la sezione è data da

$$\{ x^2 + y^2 \leq z^2 \}.$$

Mentre per z t.c. $z^2 \geq 2z - z^2 \iff z^2 \geq z \iff z \geq 1$ la sezione di Ω è data da

$$\{ x^2 + y^2 \leq 2z - z^2 \}.$$

Quindi

$$Vol(\Omega) = \int_0^1 dz \left(\pi z^2 \right) + \int_1^2 dz \, \pi \left(2z - z^2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \pi \left[z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{\pi}{3} + 3\pi - \frac{7}{3}\pi =$$

$$= 3\pi - 2\pi = \boxed{\pi}.$$