UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{z \in \mathbb{C}^{13} : (2-i)z_3 + 7z_{10} = 0,\ (1+3i)z_4 + z_9 + iz_{13} = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per avere una base?

[A] 4 [B] 11 [C] 7 [D] 13 [E] 8

2. Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^2$.

[A] $\begin{pmatrix} 67 \\ -9 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 31 \\ -7 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} 85 \\ -15 \end{pmatrix}$

3. Se $\mathbb{R}^9 = X + Y$ con X di dimensione 3, che dimensione può avere Y?

[A] Tra 3 e 9 [B] Tra 0 e 6 [C] Tra 0 e 3 [D] Tra 6 e 9 [E] Tra 3 e 6

4. Se $f : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^8$ è lineare e non surgettiva, che dimensione può avere il nucleo di f?

[A] Tra 0 e 4 [B] Tra 7 e 11 [C] Tra 4 e 11 [D] Tra 0 e 7 [E] Tra 4 e 7

5. Risolvere $\begin{cases} -4x + 5y = 7 \\ 7x - 2y = 8. \end{cases}$

[A] $x = 2,\ y = 3$ [B] $x = -3,\ y = -1$

[C] $x = 4,\ y = 10$ [D] $x = 7,\ y = 8$ [E] $x = 1,\ y = -2$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

[A] $-\frac{1}{8}$ [B] $-\frac{5}{2}$ [C] $\frac{7}{4}$ [D] $-\frac{1}{2}$ [E] $\frac{5}{4}$

7. Calcolare $\frac{14-23i}{5-2i}$.

[A] $6+i$ [B] $5-2i$ [C] $7-i$ [D] $8+3i$ [E] $4-3i$

8. Calcolare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

[A] 6 e -1 [B] -1 e 14 [C] -3 e 8 [D] 7 e -2 [E] 1 e 4

9. Trovare un generatore della retta in $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

[A] $\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 23 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}$

10. Calcolare la norma in $\mathbb{R}^4$ di $6e_1 + e_2 - 2e_3 + 3e_4$.

[A] 50 [B] 8 [C] 2500 [D] $2\sqrt{5}$ [E] $5\sqrt{2}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Esercizî

1. Porre $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$,
$X = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di X.

(B) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di X.

(C) (3 punti) Provare che v appartiene a X e determinare $[v]_{\mathcal{B}}$.

Considerare ora l'applicazione lineare $f : X \to \mathbb{R}^3$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}$,
dove $\mathcal{E}_3$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(D) (2 punti) Calcolare il rango di f.

(E) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana dell'immagine di f.

(F) (3 punti) Trovare $f(v)$.

(G) (3 punti) Trovare un generatore del nucleo di f.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 3t+5 & -2(t+2) & -12 \\ 3 & 2t-3 & -6 \\ t-1 & 2(1-t) & t+1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = 6t^3 + 13t^2 + 4t - 3$.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $2t+3$, trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(D) (4 punti) Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la A è diagonalizzabile.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Quesiti

Risposte

5. ♢

1. C

2. B

3. D

4. C

5. A

6. B

7. E

8. D

9. A

10. E

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Esercizî

Soluzioni

1.

(A) I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(B) $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$

(C) v soddisfa l'equazione di X; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

(D) 2

(E) $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

(F) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(G) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituire la prima riga con sé stessa meno due volte la seconda, poi la seconda colonna con sé stessa più due volte la prima, trovando $(2t+3)(3t-1)(t+1) = 6t^3 + 13t^2 + 4t - 3$

(B) $3t - 1$ e $t + 1$

(C) Per $t = -2$ autovalori -1 doppio e -7 semplice
Per $t = 1$ autovalori 2 doppio e 5 semplice
Per $t = 4$ autovalori 11 doppio e 5 semplice
Altrimenti autovalori $t+1,\ 2t-3,\ 3t-1$ semplici

(D) Per $t \neq -2$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Quesiti

Nome ______ **Cognome** ______ **Matricola** ______

1. Dati 13 vettori che generano $\{z \in \mathbb{C}^{11} : (2-i)z_1 + 7z_{10} = 0,\ (1+6i)z_4 + z_6 - iz_{11} = 0\}$, quanti bisogna eliminarne per avere una base?

[A] 11 [B] 13 [C] 3 [D] 4 [E] 9

2. Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbb{R}^2$.

[A] $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} -37 \\ 8 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} -60 \\ 13 \end{pmatrix}$

3. Se X, Y sono sottospazî di $\mathbb{R}^{10}$ con $X \cap Y = \{0\}$ e $\dim(X) = 3$, che dimensione può avere Y?

[A] Tra 0 e 3 [B] Tra 0 e 7 [C] Tra 3 e 10 [D] Tra 7 e 10 [E] Tra 3 e 7

4. Se $f : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^6$ è lineare e non surgettiva, che dimensione può avere il nucleo di f?

[A] Tra 8 e 13 [B] Tra 0 e 8 [C] Tra 0 e 5 [D] Tra 5 e 13 [E] Tra 5 e 8

5. Risolvere $\begin{cases} 4x + 7y = 13 \\ 5x + 6y = 8. \end{cases}$

[A] $x = 5,\ y = -1$ [B] $x = 4,\ y = -2$

[C] $x = -2,\ y = 3$ [D] $x = 108,\ y = 113$ [E] $x = 3,\ y = 4$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{7}{6}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{6}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2}{9}$ $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{4}{9}$

7. Calcolare $\frac{14+27i}{3+4i}$.

$\boxed{\text{A}}$ $5+2i$ $\boxed{\text{B}}$ $4-i$ $\boxed{\text{C}}$ $3+2i$ $\boxed{\text{D}}$ $6+i$ $\boxed{\text{E}}$ $2-3i$

8. Calcolare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{A}}$ 4 e -3 $\boxed{\text{B}}$ 6 e -5 $\boxed{\text{C}}$ 3 e -10 $\boxed{\text{D}}$ 5 e -4 $\boxed{\text{E}}$ 10 e -9

9. Trovare un generatore della retta in $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

10. Calcolare la norma in $\mathbb{R}^4$ di $5e_1 + 2e_2 - 4e_3 + 3e_4$.

$\boxed{\text{A}}$ 6 $\boxed{\text{B}}$ $6\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$ $3\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$ 54 $\boxed{\text{E}}$ 45

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Esercizî

1. Porre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$,
$X = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di X.

(B) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di X.

(C) (3 punti) Provare che v appartiene a X e determinare $[v]_{\mathcal{B}}$.

Considerare ora l'applicazione lineare $f : X \to \mathbb{R}^3$ tale che $[f]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,
dove $\mathcal{E}_3$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(D) (2 punti) Calcolare il rango di f.

(E) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana dell'immagine di f.

(F) (3 punti) Trovare $f(v)$.

(G) (3 punti) Trovare un generatore del nucleo di f.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 4t & 6(1-t) & 4(1-t) \\ -1 & t+5 & 3-t \\ t+2 & -2(t+2) & t-3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = 6t^3 + 14t^2 - 14t - 6$.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $3t+1$, trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(D) (4 punti) Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la A è diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, la cancelleria, il quaderno degli appunti e un libro di testo. Le soluzioni vanno scritte sui fogli protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. Si può uscire solo in casi eccezionali. Il tempo a disposizione è di due ore. La brutta non va consegnata, questo foglio sì. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/16 — Quesiti

Risposte

5. ♡

1. D

2. A

3. B

4. A

5. C

6. E

7. D

8. B

9. E

10. C

Soluzioni

1.

(A) I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(B) $5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$

(C) v soddisfa l'equazione di X; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(D) 2

(E) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

(F) $\begin{pmatrix} 34 \\ -7 \\ -16 \end{pmatrix}$

(G) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituire la terza riga con sé stessa più la seconda, poi la seconda colonna con sé stessa più la prima, quindi la prima riga con sé stessa meno 4 volte la terza, e restano semplici calcoli

(B) $t + 3$ e $2t - 2$

(C) Per $t = -3$ autovalori -8 doppio e 0 semplice
Per $t = 1$ autovalori 4 doppio e 0 semplice
Per $t = 5$ autovalori 8 doppio e 16 semplice
Altrimenti autovalori $t + 3,\ 2t - 2,\ 3t + 1$ semplici

(D) Per $t \neq -3$ e $t \neq 5$