PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(|x||y|)$ allora il massimo di $f(x,y)$ sull' insieme
$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$
vale

A: 1 B: $\ln 2$ C: 0 D: N.E. E: $-\ln 2$

2. L'integrale
$$\int\int_{\Omega}(x^2 + y^2)dxdy$$
dove dove $\Omega = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1, \max\{|x|,|y|\} > \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ vale:

A: $\frac{\pi}{2} - 1$ B: $\pi - 2$ C: $\pi - 1$ D: N.A. E: $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

3. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Allora il minimo di $f(x,y)$ su $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ vale:

A: $-\frac{1}{2}$ B: 0 relativo C: -2 D: N.A. E: -1

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sin^2(x+y)}-1}{\sin(xy)}$ vale

A: $\frac{1}{2}$ B: -1 C: N.A. D: 1 E: N.E.

5. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(xy)}{x^4+y^4}$ vale

A: $\frac{1}{2}$ B: -1 C: N.A. D: 1 E: N.E.

6. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} \max\{x^2, y^2\}dxdy$$
con
$$\Omega = \{(x,y)| \min\{|x|,|y|\} > 0, \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$
vale:

A: 4 B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: N.A. E: 2

7. L' area della seguente superficie $\{(x,y,z)|z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ vale

A: $\pi[5^{\frac{3}{2}} - 1]$ B: $\frac{\pi}{2}[5^{\frac{3}{2}} - 1]$ C: N.A. D: $\frac{\pi}{3}[5^{\frac{3}{2}} - 1]$ E: $\frac{\pi}{6}[5^{\frac{3}{2}} - 1]$

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln(x^2+y^2))}{\ln(x^2+y^2)}$ vale:

A: N.E. B: 1 C: N.A. D: $\frac{1}{2}$ E: 0

9. Il volume di Ω dove
$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \cdot y \cdot z > 0\}$$
vale

A: $\frac{\pi}{2}$ B: π C: N.A. D: $\frac{\pi}{3}$ E: $\frac{2}{3}\pi$

10. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{1+|x|}\sin(\frac{x}{y})$$
vale

A: N.A. B: N.E. C: 1 D: $\frac{1}{2}$ E: 0

CODICE=434614

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

20 Luglio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=434614

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 20 Luglio 2018

Cognome:____________________________________ ,
Nome:_____________________________________

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 della funzione

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y^2).$$

Esercizio 2
Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ dove

$$f(x,y) = |y - \sin x|$$

ed $A = \{(x,y)|x \in [0,\pi], y \in [0,1]\}$.

Esercizio 3
Calcolare il seguente flusso:

$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \nu dS$$

dove $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^4, 2y-z^3, x^2-3z)$, $\Sigma = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^4 = 1, z \geq 0\}$ e ν indica il versore normale (selezionato in modo continuo su Σ) che nel punto $(0,0,1)$ vale $(0,0,1)$.

Soluzioni

Esercizio 1

Ricordiamo che $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ quindi

$$\cos(x^2 + y^2) = 1 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + o(|x, y|^6)$$

da cui

$$\cos(x^2 + y^2) = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{y^4}{2} - x^2y^2 + o(|x, y|^6)$$

da cui il polinomio di Taylor cercato vale $1 - \frac{x^4}{2} - \frac{y^4}{2} - x^2y^2$.

Esercizio 2

E'chiaro che $\min_A f \geq 0$. D'altra parte se scegliamo $(x, y) = (0, 0) \in A$ abbiamo che $f(0, 0) = 0$ e quindi $\min_A f = 0$. Per calcolare il massimo invece studiamo $M = \max_A(y - \sin x)$ ed $m = \min_A(y - \sin x)$ allora con semplici considerazioni abbiamo che $\max_A f = \max\{M, |m|\}$. Per calcolare M osserviamo che siccome su $[0, \pi]$ la funzione sin oscilla tra 0 ed 1 ed invece $y \in [0, 1]$ allora $M = 1$. Riguardo m con ragionamenti simili abbiamo $m = -1$ e quindi abbiamo $\max_A f = 1$.

Esercizio 3

Osserviamo che Σ non e' una superficie chiusa, pero'diventa chiusa se aggiungiamo il coperchio $C = \{(x, y, 0)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quindi avendo il campo divergenza nulla deduciamo che il flusso cercato equivale all'opposto del flusso lungo il coperchio C con normale $(0, 0, -1)$, e quindi

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 \theta \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

PARTE A

1. Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = 0 = p(0)\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 3). Allora $dimW$ e':

   A: 3 B: 0 C: N.A. D: 1 E: 2

2. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \to W$ lineare ed iniettiva. Allora necessariamente

   A: $dimV > dimW$ B: $dimV \geq dimW$ C: $dimV = dimW$ D: N.A. E: $dimV \leq dimW$

3. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 18}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 18}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq 18}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di 18) l' applicazione lineare cosi' definita: $Lp(x) = p(x + 1)$. Allora $dim(kerL)$ vale:

   A: 19 B: 2 C: 1 D: N.A. E: 0

4. Il seguente sottospazio vettoriale delle matrici $n \times n$

$$V = \{A \in mat(n \times n) | trA = 0\}$$

   ha dim.

   A: N.A. B: n^2 C: $n(n-1)$ D: $n(n+1)$ E: $(n-1)(n+1)$

5. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ allora $[A^{-1}]_{1,3}$ (cioe' l' elemento della matrice inversa di A che si trova sulla prima riga e la terza colonna) vale

   A: $-\frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{1}{5}$ D: N.A. E: $-\frac{1}{5}$

6. La matrice simmetrica $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

   A: $detA = 0$ B: e' definita negativa C: e' indefinita D: N.A. E: e' definita positiva

7. Sia $W = span\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p(1) = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 7}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 7). Allora $dimW$ e':

   A: 8 B: 6 C: N.A. D: 5 E: 7

8. Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ allora gli autovalori di A sono:

   A: N.A. B: $(-1, 1, 1)$ C: $(-1, -1, -1,)$ D: $(1, 1, 1)$ E: $(-1, -1, 1)$

9. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $L(a, b, c) = (b, c, a)$. Gli autovalori di L sono:

   A: N.A. B: $(-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$ C: $(1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$ D: $(1, -1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ E: $(1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$

10. Il seguente sottoinsieme delle matrici 2×2

$$\{A \in mat(2 \times 2) | rgA = 1\}$$

   (rg vuol dire rango) gode della seguente proprieta'

   A: N.A. B: e' uno sp. vett. di dim. 2 C: e' uno sp. vett. di dim. 3 D: e' uno sp. vett. di dim. 4 E: non e' uno spazio vettoriale

CODICE=272289

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

20 Luglio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=272289

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 20 Luglio 2018

Cognome:____________________________________,
Nome:______________________________________

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W sul campo $\mathbb{R}$. Siano $v_1, .., v_k \in V$ vettori fissati in V. Provare che se $L(v_1), ..., L(v_k) \in W$ sono linearmente indipendenti in W allora $v_1, .., v_k \in V$ sono linearmente indipendenti in V.

Esercizio 2
Sia W il seguente sottospazio delle matrici 2×2:

$$W = span\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}.$$

Calcolare $dimW$.

Esercizio 3 Sia dato il seguente sistema lineare dipendente dai parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \beta \\ x + y + \alpha z = \beta^2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α, β il sistema risulta impossibile, per quali valori di α, β ammette un'unica soluzione, per quali valori di α, β ammette infinite soluzioni.

Sol. Esercizio 1 Supponiamo per assurdo che $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$ con λ_i non tutti nulli, allora $0 = L(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 L(v_1) + ... + \lambda_n L(v_n)$ e quindi anche $L(v_1), ..., L(v_n)$ sarebbero linearmente dipendenti, ma cio' e' assurdo per ipotesi.

Sol. Esercizio 2 Le componenti delle matrici che generano W rispetto alla base canonica sono $(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1), (1,1,0,1)$ e quindi $dimW$ e' pari al rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che vale 3. Infatti la matrice ha determinante nullo ed inoltre il minore fatto dalla seconda, terza e quarta riga, e seconda, terza e quarta colonna ha determinante non nullo.

Sol. Esercizio 3 Calcolando il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

si vede che e'nullo per $\alpha = 1, -2$. Quindi se $\alpha \neq 1, -2$ allora per ogni β esiste unica soluzione.
Se $\alpha = 1$ allora il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = \beta \\ x + y + z = \beta^2. \end{cases}$$

e quindi e' impossibile se $\beta \neq 1$ ed ammette infinite soluzioni se $\beta = 1$. Infine per $\alpha = -2$ allora la matrice completa associata al sistema e'

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -2 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

che usando mosse elementari sulle righe e' equivalente a

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\beta + 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2\beta^2 + 1 \end{pmatrix}$$

e quindi sommando seconda e terza equivale a

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2\beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta^2+2\beta+2 \end{pmatrix}$$

Siccome $2\beta^2 + 2\beta + 2 > 0$ per ogni β numero reale abbiamo che il sistema e' impossibile per $\alpha = -2$ e per ogni valore di β.