PARTE A

1. Il seguente $\int\int_{\Omega} \max\{0, x+y\}dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x,y)|\min\{x,y\} > 0, \max\{x,y\} < 2\}$$
vale
A: 16 B: 4 C: 2 D: N.A. E: 8

2. Sia data la funzione $f(x,y) = |\ln(1+\ln(1+|xy|)+|\ln(1+|xy|))|$. Allora il punto $(0,0)$ e':
A: N.A. B: min reativo ma non min assoluto C: max assoluto D: max relativo E: min assoluto

3. Il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\sin x| - |\sin y|}{\sin x + \sin y}$$
vale:
A: 1 B: N.A. C: N.E. D: $\frac{1}{2}$ E: 0

4. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$$
vale
A: -1 B: 1 C: 0 D: N.A. E: $\frac{1}{2}$

5. Il gradiente della funzione $f(x,y) = \ln|\cos(|x|+|y|)|$ nel punto $(0,0)$ vale
A: $(0,0)$ B: $(1,1)$ C: N.A. D: N.E. E: $(0,1)$

6. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)-\sin(xy)}{x^2+y^2}$ vale
A: N.A. B: N.E. C: 1 D: 0 E: -1

7. Sia data nel piano (y,z) la regione
$$\Omega = A$$
con
$$A = \{(x,z)|\min\{y,z\} > 2, \max\{y,z\} < 4\}.$$
Il volume della regione ottenuta ruotando Ω intorno all' asse z vale:
A: 24π B: N.A. C: 12π D: 9π E: 2π

8. Il gradiente della funzione $f(x,y) = [|arctg(xy)|^6 + (|x|+|y|)^9]^{1/6}$ nel punto $(0,0)$ vale
A: $(0,1)$ B: N.A. C: $(0,0)$
D: N.E. E: $(1,0)$

9. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}\sin(\frac{x}{y})$$
vale
A: N.A. B: 1 C: $\frac{1}{2}$ D: N.E. E: 0

10. L'integrale
$$\int\int_{\Omega} \ln(xy^2)dxdy$$
dove dove $\Omega = \{(x,y)|\min\{x,y\} > 1, \max\{x,y\} < 2\}$ vale:
A: $-1+\ln 2$ B: N.A. C: $-3+6\ln 2$ D: $-4+2\ln 2$ E: $-1+3\ln 2$

CODICE=807404

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

2 Luglio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1					X
2					X
3			X		
4			X		
5	X				
6		X			
7	X				
8			X		
9				X	
10			X		

CODICE=807404

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 2 Luglio 2018

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ dove

$$f(x,y) = (x-y)^2 - (y-1)^2$$

ed A indica il triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (1,1)$.

Esercizio 2
Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_\Omega \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) | x > 0, y > 0, x < y, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 3
Calcolare il seguente flusso:

$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \nu_{ext} dS$$

dove $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$, $\Sigma = \partial\Omega$ e $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0,1]\}$ e ν_{ext} indica il versore normale a $\partial\Omega$ che punta verso l'esterno di Ω.

Soluzioni

Esercizio 1

Imponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ troviamo le condizioni

$$x - y = 0, -2(x-y) - 2(y-1) = 0$$

e quindi $x = y = 1$. Quindi siamo su un vertice del triangolo A. Pertanto max e min stanno sul bordo del triangolo. Indichiamo con L_1, L_2, L_3 i tre lati passanti per $(0,0)$ e $(0,1)$, $(0,0)$ e $(1,1)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. Osserviamo che L_1 si parametrizza come segue $[0,1] \ni t \to (0,t)$ e quindi la restrizione su L_1 di f diventa $f(0,t) = t^2 - (t-1)^2 = 2t - 1$ da cui troviamo i valori di massimo e minimo su L_1 dati da 1 e 0. Osserviamo che L_2 si parametrizza come segue $[0,1] \ni t \to (t,t)$ e quindi la restrizione su L_1 di f diventa $f(0,t) = -(t-1)^2$ da cui troviamo i valori di massimo e minimo su L_1 dati da 0 e -1. Osserviamo che L_2 si parametrizza come segue $[0,1] \ni t \to (t,1)$ e quindi la restrizione su L_3 di f diventa $f(t,1) = (t-1)^2$ da cui troviamo i valori di massimo e minimo su L_3 dati da 1 e 0. Quindi massimo e minimo assoluti sono 1 e -1.

Esercizio 2

Il dominio Ω si esprime come segue in coordinate polari:

$$\{(\rho(\theta), \theta) | \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), 0 < \rho(\theta) < 2\cos\theta\}$$

quindi l'integrale diventa

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \frac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta}{1+\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta (\int_0^{2\cos\theta} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \rho d\rho) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta (\int_0^{4\cos^2\theta} \frac{x}{1+x} dx) d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \ln(1+4\cos^2\theta) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos^4\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\ln(1+4\cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\ln(1+4\cos^2\theta)d\theta.$$

Con un cambio $t = \cos\theta$ abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\ln(1+4\cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t\ln(1+4t^2)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} s\ln(1+s^2)ds$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{8}} \ln(1+w)dw = \frac{1}{8}[w\ln(1+w)]_0^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{w}{1+w}dw$$

$$= \frac{1}{64}\ln(1+\frac{1}{8}) - \frac{1}{8}[w-\ln(1+w)]_0^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{64}\ln(1+\frac{1}{8}) - \frac{1}{64} + \frac{1}{8}\ln(1+\frac{1}{8})$$

$$= \frac{9}{64}\ln(1+\frac{1}{8}) - \frac{1}{64}$$

Quindi l'integrale inziale vale $\frac{1}{8} - \frac{9}{64}\ln(1+\frac{1}{8}) + \frac{1}{64} = \frac{9}{64}(1-\ln(1+\frac{1}{8}))$.

Esercizio 3

Usando il teorema della divergenza basta calcolare

$$3\int\int\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\theta + 3\pi\int_0^1 z^2dz = \frac{3}{2}\pi + \pi = \frac{5}{2}\pi.$$

PARTE A

1. Siano date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Allora $det(A \cdot B^{-1})$ vale

   A: -1 B: $\frac{1}{2}$ C: $\frac{1}{3}$ D: 0 E: N.A.

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $L(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, $L(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$, $L(e_2) = -e_2$, (dove e_1, e_2, e_3 e' la base canconica di $\mathbb{R}^3$). Gli autovalori di L sono:

   A: $(1, 1, -1)$ B: $(-1, -1, 1)$ C: $(1, 1, 1)$ D: $(-1, -1, -1,)$ E: N.A.

3. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di k) l' applicazione lineare cosi' definita: $Lp(x) = (x - 1) \cdot p(x)$. Allora $dim(kerL)$ vale:

   A: 3 B: 2 C: 1 D: N.A. E: 0

4. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ allora $[A^{-1}]_{2,3}$ (cioe' l' elemneto della matrice inversa di A che si trova sulla seconda riga e la terza colonna) vale

   A: $\frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{3}$ C: $\frac{1}{8}$ D: 1 E: N.A.

5. Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{14}$ tali che $dimV = 8$ e $dimW = 6$. Allora $d = dim(V \cap W)$ soddisfa necessariamente:

   A: $d \leq 6$ B: N.A. C: $d = 6$ D: $d > 6$ E: $d = 0$

6. Il seguente sottoinsieme delle matrici 2×2

$$\{A \in mat(2 \times 2) | detA \neq 0\}$$

   gode della seguente proprieta'

   A: e' uno sp. vett. di dim. 4 B: N.A. C: e' uno sp. vett. di dim. 2 D: non e' uno spazio vettoriale E: e' uno sp. vett. di dim. 1

7. Sia $W = span\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p(0) = 0 = p'(0)\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 7}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 7). Allora $dimW$ e':

   A: 5 B: N.A. C: 6 D: 8 E: 7

8. Il seguente sottospazio vettoriale delle matrici 2×2

$$V = \{A \in mat(2 \times 2) | trA = 0\}$$

   ha dim.

   A: N.A. B: 4 C: 3 D: 2 E: 1

9. La matrice simmetrica $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

   A: N.A. B: e' definita positiva C: e' definita negativa D: $detA = 0$ E: e' indefinita

10. Sia $W = span\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 5}[x] | p'(0) = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 5). Allora $dimW$ vale:

    A: 3 B: 4 C: 2 D: 5 E: N.A.

CODICE=619798

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

2 Luglio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1			X		
2	X				
3					X
4				X	
5	X				
6				X	
7			X		
8			X		
9					X
10				X	

CODICE=619798

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 2 Luglio 2018

Cognome:___________________________________ ,
Nome:______________________________________

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Sia data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x, y, z) \to \begin{pmatrix} x \\ y+3z \\ x+y-z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Provare che $v_1 = (0, 3, 1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (-1, 1, 0)$ sono autovettori di L. Determinare i relativi autovalori di L. Provare che $\mathbb{R}^3 = span\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 2
Sia dato il seguente sistema lineare dipendente dal parametro k

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema risulta impossibile, per quali valori di k ammette un'unica soluzione, per quali valori di k ammette infinite soluzioni.

Esercizio 3
Siano dati i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ definiti come segue:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$$

e

$$V = span\{(2, -1, -2), (-3, 4, 3)\}.$$

Provare che $U = V$.

Es. 1

Osserviamo che

$$L\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}0\\-1\\+1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

quindi gli autovalori relativi sono $2, -2, 1$ che sono distinti. Pertanto i relativi autovettori v_1, v_2, v_3 sono necessariamente una base.

Es. 2

Introduciamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & (K+2) & 4\\ 1 & 1 & 3 & (K^2-K+2)\end{pmatrix}$$

e vediamo per quali K si ha $\det A \neq 0$.

$$\mathrm{Det}\, A = \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & (K+2) & 4\\ 1 & 3 & (K^2-K+2)\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & (K+2)\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= (K+2)(K^2-K+2) + \cancel{12} + 6 - 2(K+2) - \cancel{12} - 3(K^2-K+2) =$$

$$= (K-1)(K^2-K+2) + 6 - 2K - 4 = (K-1)(K^2-K+2) - 2(K-1)$$

$$= (K-1)(K^2-K)$$

quindi x $K \neq 0, 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists!$ soluzione.

Se $K = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + 2z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

e quindi IMPOSSIBILE POICHÉ $y + 3z = 1$ e $y + 3z = -1$

sono incompatibili.

Se $K = 1$ allora il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + 3z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

quindi abbiamo infinite sol.

Es. 3 Si prova facilmente che

dim $U = 2$ (infatti $U = \operatorname{Ker} L$ dove

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longrightarrow x+z$$

e $\dim(\operatorname{Im} L) = 1$)

dim $V = 2$ (infatti il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

è 2 come si vede prendendo il minore $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$)

Inoltre $(2,-1,-2) \in U$ e $(-3,4,3) \in U \Longrightarrow$

$V \subseteq U$. Ma siccome $\dim V = \dim U$

$\Longrightarrow U = V$.