LEZIONE 09-03-2020

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Ricordiamo che possiamo procedere con le coordinate polari, quindi

$$f(\rho\cos\alpha, \rho\,\text{sen}\,\alpha) = \frac{\rho^3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\rho^2} = \rho\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$$

Da ciò deduciamo

$$|f(\rho\cos\alpha, \rho\,\text{sen}\,\alpha)| \le |\rho|\,|\cos\alpha|\,|\text{sen}\,\alpha|^2 \le |\rho|$$

e quindi concludiamo poiché $\lim_{\rho\to 0} |\rho| = 0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2} = ?$$

Procediamo anche questa volta per coordinate polari, quindi $f(\rho\cos\alpha, \rho\,\text{sen}\,\alpha) = \dfrac{\rho^3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\rho^2(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)}$

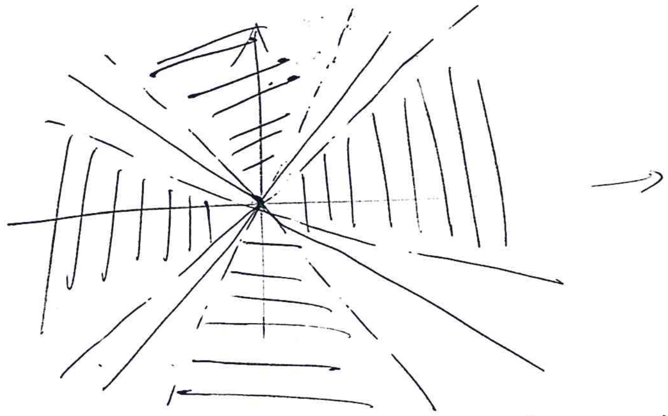
$$= \rho\,\frac{\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}$$

Proviamo a stimare $|f(\rho\cos\alpha, \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)|$ come segue:

$$\left|\frac{\rho\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha}\right| \leq |\rho|\,\frac{|\cos\alpha|\,|\mathrm{sen}^2\alpha|}{|\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha|}$$

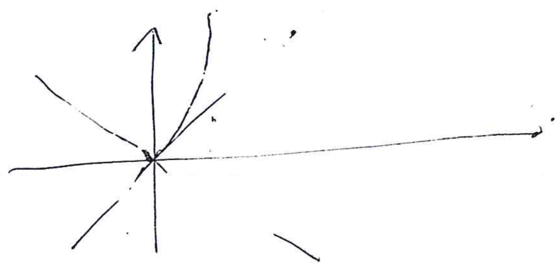
In tal caso non possiamo concludere come prima poiché il denominatore $|\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha|$ può essere arbitrariamente piccolo se α si avvicina a

$$\frac{\pi}{4}+K\frac{\pi}{2}$$

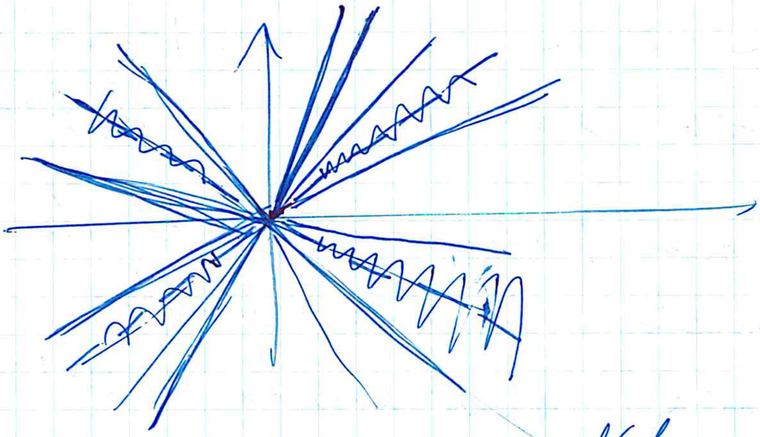


Se siamo nella zona tratteggiata (ossia fuori delle bisettrici del 1° e del 2° quadrante) allora $|\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha|$ si mantiene discosto da zero e quindi in quella zona $|\rho|\,\dfrac{|\cos\alpha|\,|\mathrm{sen}^2\alpha|}{|\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha|} \xrightarrow{\rho\to 0} 0$

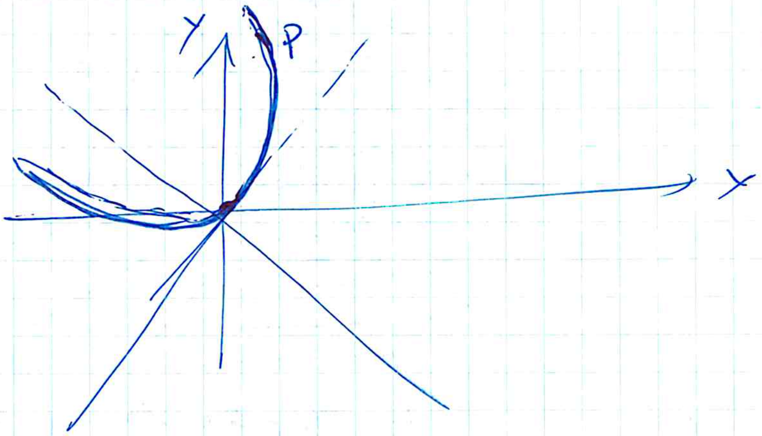
Ma cosa succede se ci avviciniamo alla bisettrice quando $\rho\to 0$?



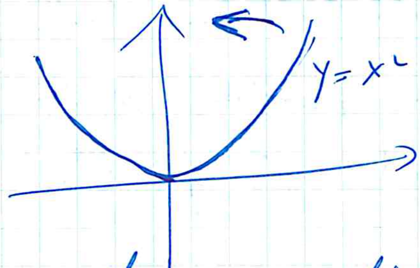
Ovviamente se vogliamo avvicinarci all'origine invadendo le zone non tratteggiate, non possiamo farlo con semirette! Per le semirette α è costante!



Proviamo quindi con una parabola che siano tangenti alla bisettrice:



P possiamo immaginarla come una rotata di $\frac{\pi}{4}$ della parabola $y = x^2$



Sappiamo che le rotazioni sono applicazioni lineari, e se la rotazione è di $\frac{\pi}{4}$ allora la matrice associata è:

$$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte i punti della parabola "dritta" sono

$y = x^2$ ossia le coppie (x, x^2) e agendo con la rotazione $R_{\frac{\pi}{4}}$ si trasforma in

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right).$$

Consideriamo quindi la restrizione di

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2-y^2}$$ in tali punti.

Allora $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right) =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-x^2)(x+x^2)^2}{(x-x^2)^2-(x+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-x^2)(x+x^2)^2}{(x-x^2-x-x^2)(x-x^2+x+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-x^2)x^2(1+x^2)^2}{-2x^2 \cdot 2x}$$

$$= -\frac{(1-x^2)(1+x^2)^2}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Concludiamo poiché il limite sulle restrizioni su rette passanti per $(0,0)$ vale 0 e quindi il limite non esiste.

DERIVATE PARZIALI

Ricordiamo che in 1-variabile $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ allora

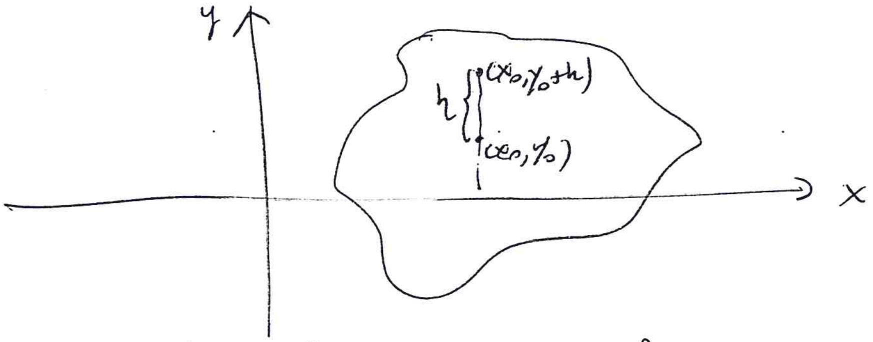
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Introduciamo una generalizzazione in più variabili, ossia assumiamo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } n \geq 2.$$

Supponiamo per comodità $n=2$, ma il discorso si generalizza per $n \geq 2$ senza difficoltà.

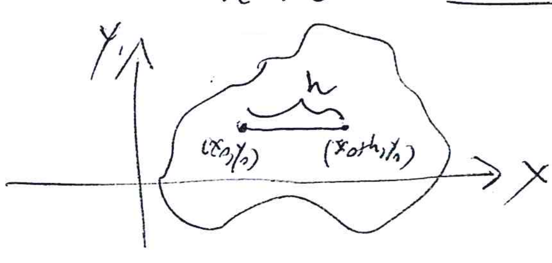
Fissato $(x_0, y_0) \in \Omega$ introduciamo due derivate di f, una fatta rispetto alla direzione x ed una rispetto alla direzione y, come segue



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Sostanzialmente per calcolare

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ si congela la variabile $y=y_0$ e ci riduciamo alla funzione di una variabile $x \longrightarrow f(x,y_0)$ la cui derivata in x_0 $f'(x,y_0)_{|x=x_0}$ è esattamente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Analoga interpretazione per $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$: si congela $x=x_0$ e si deriva $y \longrightarrow f(x_0,y)$ in $y=y_0$.

NOTAZIONE

A volte si usano le notazioni equivalenti $\partial_x f$, f_1, f_x la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$. Analogamente $\partial_y f$, f_1, f_y per indicare $\frac{\partial f}{\partial y}$.

DEF. Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ chiameremo

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Quindi il gradiente di una funzione di 2 variabili è un vettore di $\mathbb{R}^2$.

GENERALIZZAZIONE Data una funzione di tre variabili $f(x,y,z)$ si possono definire (quando esistono!) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$

in modo simile a quanto fatto per le funzioni di due variabili

Ad esempio

$$\partial_x f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}.$$

In tal caso si definisce

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(\partial_x f(x_0,y_0,z_0),\ \partial_y f(x_0,y_0,z_0),\ \partial_z f(x_0,y_0,z_0)\right) \in \mathbb{R}^3.$$

<u>Osservazione</u>

Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

genera una funzione a valori vettoriali

$$\nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \left(\partial_x f(x,y,z),\ \partial_y f(x,y,z),\ \partial_z f(x,y,z)\right)$$

a patto che le derivate parziali esistono.

Analogamente se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

allora, se esistono le derivate parziali si ha

$$\nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)$$

CALCOLO DELLE DERIVATE PARZIALI

$f(x,y) = x^2 y^3$ dire se esiste $\nabla f(1,2)$.

Si tratta di capire se esistono

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \partial_x f(1,2)$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(1,2+k)-f(1,2)}{k} = \partial_y f(1,2)$$

Vediamo il primo limite:

$$\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \frac{(1+h)^2\cdot 8-8}{h} = 8\left[\frac{(1+h)^2-1}{h}\right] =$$

$$= 8\left[\frac{h^2+2h}{h}\right]$$

quindi

$$\partial_x f(1,2) = \lim_{h\to 0} 8\left[\frac{h^2+2h}{h}\right] = \lim_{h\to 0} 8h+16 = \boxed{16}.$$

Similmente si vede che (fare per esercizio!)

$$\partial_y f(1,2) = \boxed{12}.$$

DOMANDA Se volessimo calcolare ∇f in un punto diverso da $(1,2)$ dovremmo rifare i limiti dei rapporti incrementali sul nuovo punto?

NON È NECESSARIO, POSSIAMO USARE LE REGOLE IMPARATE PER LE DERIVATE IN UNA VARIABILE

Concretamente, per calcolare la derivata rispetto ad x di una funzione $f(x,y)$, si possono usare le regole di derivazione nella variabile x trattando la y come una costante!

Analogamente per calcolare la derivata parziale rispetto ad y di $f(x,y)$ (in tal caso si tratta di derivare rispetto ad y con le regole usuali trattando x come una costante.

RIPRENDIAMO LA FUNZIONE $f(x,y) = x^2 y^3$.

Se deriviamo rispetto ad x (tenendo y costante) si ha

$$\boxed{\partial_x f(x,y) = 2xy^3}$$

(qui ho derivato x^2 come un pol. in x ed y^3 è visto come un numero fissato).

Analogamente

$$\boxed{\partial_y f(x,y) = 3x^2 y^2}.$$

IN PARTICOLARE RITROVIAMO

$$\partial_x f(1,2) = 16 \quad e \quad \partial_y f(1,2) = 12 .$$

Senza fatica possiamo calcolare $\partial_x f(x_0,y_0)$ e $\partial_y f(x_0,y_0)$ per un generico (x_0,y_0).

Altro esempio di calcolo di ∇f.

Sia $f(x,y,z) = e^{xy} \operatorname{sen}(y+z^2)$ una funzione di tre variabili. Calcolare $\nabla f(x,y,z)$.

Usando le regole di derivazione in una variabile (immaginando y e z costanti) si trova:

$$\boxed{\partial_x f = y e^{xy} \operatorname{sen}(y+z^2)}$$

Analogamente

$$\boxed{\partial_y f = x e^{xy} \operatorname{sen}(y+z^2) + e^{xy} \cos(y+z^2)}$$

$$\boxed{\partial_z f = e^{xy} \cos(y+z^2) \cdot 2z}$$

In particolare possiamo calcolare $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ in ogni punto specifico a partire ~~da~~ queste formule:

$$\nabla f(1,0,0) = \big(\partial_x f(1,0,0), \partial_y f(1,0,0), \partial_z f(1,0,0)\big) = $$
$$= (0, 1, 0).$$

OSS. Ovviamente lo stesso valore di $\nabla f(1,0,0)$ lo avremmo trovato calcolando i limiti dei rapporti incrementali nel punto $(1,0,0)$ tenendo congelate due delle tre variabili!

ATTENZIONE A QUANDO NELL'ESPRESSIONE DI $f(x,y,z)$ SONO COINVOLTE FUNZIONI NON DERIVABILI OVUNQUE (tipicamente $|\cdot|$, $\sqrt{}$ etc.)

Esempio Calcolare se esiste

$\nabla f(0,0)$ dove $f(x,y) = |\operatorname{sen}(xy)|$.

Oss. In tal caso la regola delle derivate della funzione composta è compromessa dalla non derivabilità della funzione $|\cdot|$ nell'origine. In particolare non si può applicare tale regola nei punti tali che $\operatorname{sen}(xy) = 0$!

Come procedere in tal caso?
Si usa la definizione di $\nabla f(0,0)$ vista come limite di rapporti incrementali.

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{h\cdot 0}})| - |\operatorname{sen}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{0\cdot 0}})|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{|\operatorname{sen}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{0\cdot k}})| - |\operatorname{sen}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{0\cdot 0}})|}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \boxed{0}.$$

Da ciò deriva $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Esempio Calcolare $\nabla f(0,0)$ dove

$$f(x,y) = \left|\frac{1}{2} + \operatorname{sen}(xy)\right|.$$

POSSIAMO PROCEDERE IN DUE MODI!

1° METODO (ELIMINAZIONE DEL VALORE ASSOLUTO)

Siamo interessati a scrivere le derivate parziali di $\left|\frac{1}{2} + \operatorname{sen}(xy)\right|$ in $(0,0)$, ma osserviamo che la funzione in valore assoluto $\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)$ è diversa da 0 (a dire il vero vale $\frac{1}{2}$ in $(x,y)=(0,0)$) e quindi nelle vicinanze di $(0,0)$ (ossia in una palletta di raggio positivo $B_\delta(0,0)$) si ha $\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy) \geq 0$ se $(x,y) \in B_\delta(0,0)$ e quindi $\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right| = \frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)$ se $(x,y) \in B_\delta(0,0)$.

Pertanto $f(x,y) = \left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right|$ coincide con la funzione $\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)$ in $(x,y) \in B_\delta(0,0)$.
Quindi calcolare $\nabla f(0,0)$ equivale a calcolare $\nabla\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right)\Big|_{(0,0)}$.

Ma ora per calcolare $\nabla\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right)$ possiamo usare le regole di derivazione in 1 variabile (abbiamo eliminato l'unico elemento pericoloso che è $|\cdot|$).

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right) = \left(y\cos(xy),\ x\cos(xy)\right)$$

$$\Longrightarrow \nabla f(0,0) = \nabla\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right)\Big|_{(0,0)} = (0,\ 0).$$

2° METODO Calcoliamo $\nabla\left|\frac{1}{2}+\text{sen}(xy)\right|$ in $(0,0)$ usando i rapporti incrementali:

$$\partial_x\left(\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(xy)\right|\right)(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{1/2}{\overset{\parallel}{\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(h\cdot 0)\right|}}-\overset{1/2}{\overset{\parallel}{\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(0\cdot 0)\right|}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\partial_y\left(\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(xy)\right|\right)(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\overset{1/2}{\overset{\parallel}{\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(0\cdot k)\right|}}-\overset{1/2}{\overset{\parallel}{\left|\tfrac{1}{2}+\text{sen}(0\cdot 0)\right|}}}{h}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0.$$

ESEMPIO Calcolare $\nabla\left(\left|\frac{1}{2}+\text{sen}(xy)\right|\right)$ in $(x,y)=(1,-\frac{\pi}{6})$.

OSS. Osserviamo che $\frac{1}{2}+\text{sen}(x\cdot y)$ vale 0 in $(1,-\frac{\pi}{6})$ quindi non siamo più autorizzati a togliere il valore assoluto in un intorno di $(1,-\frac{\pi}{6})$.

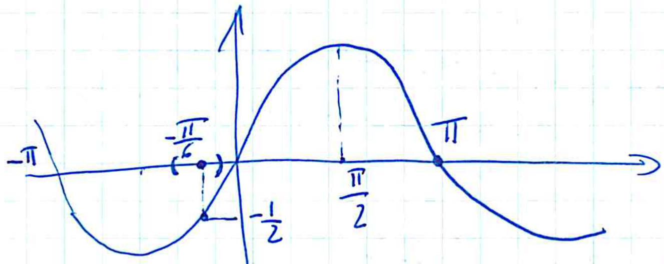
Dobbiamo quindi procedere con i rapporti incrementali. Ad esempio vediamo se esiste (e in caso affermativo calcoliamo) $\partial_x\left(\left|\frac{1}{2}+\text{sen}(xy)\right|\right)(1,-\frac{\pi}{6})$ usando i rapporti incrementali.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,-\frac{\pi}{6})-f(1,-\frac{\pi}{6})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{1}{2}+\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right|}{h}$$

Si tratta quindi di capire se esiste (e in tal caso quanto vale) il limite di una variabile.

Osserviamo che dal grafico della funzione sen x si deduce che $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right) > \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ~~se~~ $h<0$ e $|h|$ piccolo

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right) < \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ se $h>0$ e $|h|$ piccolo.



Quindi $\lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right|}{h}$ può essere studiato facendo limite destro e limite sinistro tenuto conto che per quanto detto sopra

$$\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right| = \frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right) \text{ se } h<0 \text{ e } |h| \text{ piccolo}$$

$$\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right| = -\frac{1}{2}-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right) \text{ se } h>0 \text{ e } |h| \text{ piccolo.}$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2} - \underbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{=-\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right) - \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right)\right)}{h} - \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} = \frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad \frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Similmente si trova

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}h\right)}{h}}_{\downarrow\, -\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}h\right)\right|}{h}$ $\nexists$ e in particolare $\nexists$ $\nabla\left(\left|\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(xy)\right|\right)\Big|_{(1,-\frac{\pi}{6})}$.

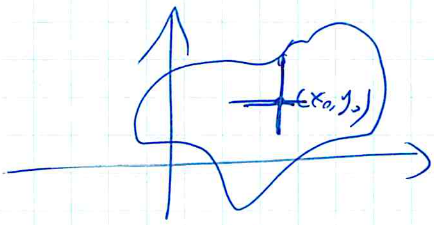
GRADIENTE E CONTINUITÀ

In analisi 1 avete visto il seguente teorema.

Teo: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $\exists f'(x_0)$ con $x_0\in(a,b) \Longrightarrow$ f è cont. in x_0

DOMANDA: vale la seguente generalizzazione per più variabili?

$$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \exists \nabla f(x_0,y_0) \text{ con } (x_0,y_0)\in\Omega \overset{?}{\Longrightarrow} f \text{ è cont. in } (x_0,y_0)?$$



LA RISPOSTA È NEGATIVA!

Esempio Introduciamo la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Oss. $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}^2$ invece $\operatorname{Dom}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.
In un certo senso forzo $(0,0)$ a stare in $\operatorname{Dom} f$.

Dico che $\exists\nabla f(0,0)$ ma f non è cont. in $(0,0)$.

Oss. Per la funzione $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non ha senso parlare né di cont. in $(0,0)$ né di ∇ in $(0,0)$.

Invece per la funzione f ha senso parlare di cont. ed ∇ in $(0,0)$ poiché $(0,0)$ sta nel dominio.

PROVIAMO CHE f È DISCONTINUA IN $(0,0)$.

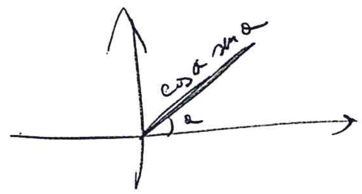
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

e sappiamo che questo limite $\nexists$.

Ricordiamo infatti che in polare

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = \boxed{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

↑ funzione costante per ogni angolo θ fissato!



Pertanto non può essere vera la condizione di cont. che prevede $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ e quindi in particolare il limite deve esistere.

PROVIAMO CHE $\exists\, \nabla f(0,0)$.

Oss. Se volessimo calcolare $\nabla f(x_0,y_0)$ con $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ potremmo usare le regole di derivazione di 1 variabile. Per esempio $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y(x^2+y^2) - 2x\,xy}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$!

Ma in $(0,0)$ non possiamo procedere in questo modo. Usiamo quindi i rapporti incrementali.

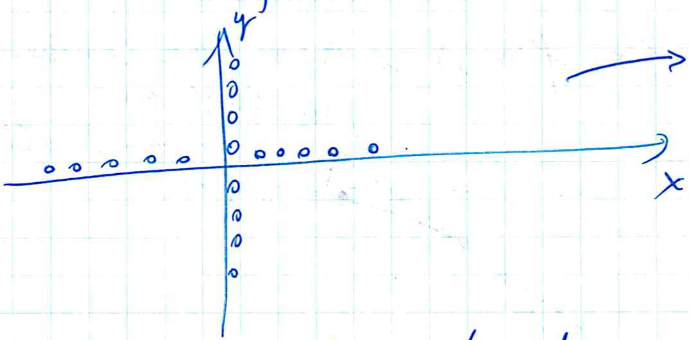
$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0\cdot k}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

e quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Oss. Se avessimo scelto $f(0,0)=1 \Rightarrow \nexists\, \nabla f(0,0)$

Oss. Per vedere che $\nabla f(0,0)=(0,0)$ potevamo anche osservare che $f(x,y)$ si annulla sugli assi



$$\begin{cases} f(x,0)=0 \\ f(0,y)=0 \end{cases}$$

quindi facendo le derivate di una variabile, una volta fatte le restrizioni, si riduce a calcolare la derivata della funzione nulla, che quindi vale zero!

CONCLUSIONE

La nozione di gradiente è troppo debole per garantire la continuità!

INTRODUCIAMO ORA LA NOZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ.

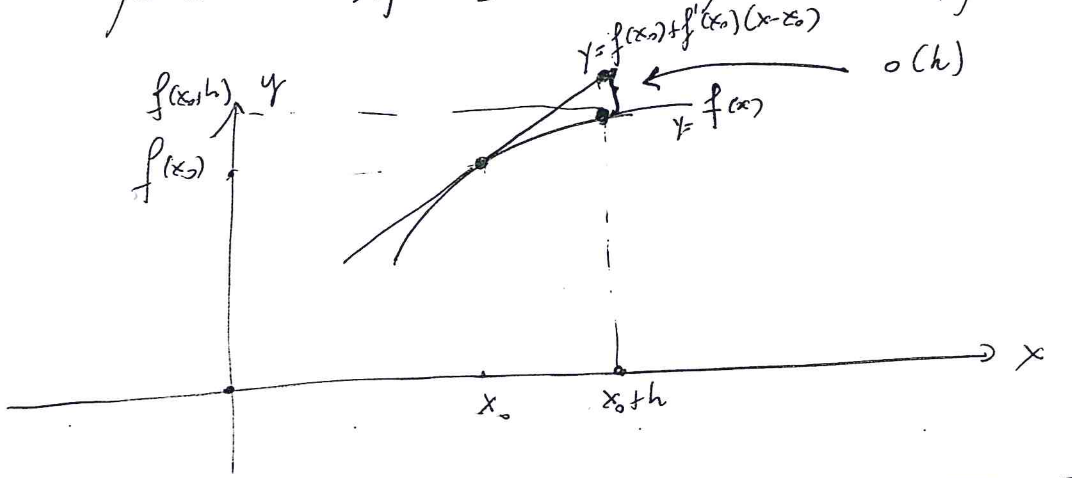
DIFFERENZIABILITÀ

Ricordiamo che in una variabile se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in $x_0\in(a,b)$ allora

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$$

con $\frac{o(h)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0$.

Ciò si interpreta geometricamente come l'esistenza della retta tangente al grafico passante per $(x_0,f(x_0))$ e con pendenza $f'(x_0)$.



GENERALIZZAZIONE SULL'ESISTENZA DEL PIANO TANGENTE

$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ si dice differenziabile in $(x_0,y_0)\in\Omega$ se $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\alpha h+\beta k+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$$

Ciò vuol dire che

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\alpha h-\beta k}{\quad}\xrightarrow{(h,k)\to(0,0)}0$$

Teo. (Cont.) Se $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è diff. in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ è cont. in (x_0, y_0).

Teo. ($\exists \nabla f$) Se $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è diff. in $(x_0, y_0) \Rightarrow$

$\exists \nabla f(x_0, y_0)$ ed inoltre $\alpha = \partial_x f(x_0, y_0)$ e $\beta = \partial_y f(x_0, y_0)$.

Ossia

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\, h + \partial_y f(x_0, y_0)\, k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

Oss. La nozione di differenziabilità può essere estesa a tre o più variabili, in modo analogo.

Per esempio $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è diff. in (x_0, y_0, z_0) se $\exists\, \alpha, \beta, \gamma$ t.c.

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) = f(x_0, y_0, z_0) + \alpha h + \beta k + \gamma l + o(\sqrt{h^2+k^2+l^2}).$$

In tal caso $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\partial_x f(x_0, y_0, z_0), \partial_y f(x_0, y_0, z_0), \partial_z f(x_0, y_0, z_0)\right)$.

Inoltre anche in tre variabili o più vale il principio in base al quale differenziabilità in (x_0, y_0, z_0) implica continuità in (x_0, y_0, z_0).

DIM. f diff in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ cont. in (x_0, y_0).

Bisogna provare che se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

allora $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ che

equivale a $\lim_{(h,k) \to (0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)$.

Ma ciò segue dall'identità $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \overset{\to 0}{\alpha h} + \overset{\to 0}{\beta k} + \overset{\to 0}{o(\sqrt{h^2+k^2})}$

DIM. f diff. in $(x_0,y_0) \Longrightarrow \exists \nabla f(x_0,y_0)$ ed inoltre
$(\alpha,\beta) = (\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0))$.

Dobbiamo quindi verificare che se

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2+k^2})}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \alpha$$

$$\parallel$$

$$\partial_x f(x_0,y_0)$$

e

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k} = \beta$$

$$\parallel$$

$$\partial_y f(x_0,y_0)$$

Calcoliamo il primo limite. Usando la diff. abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha h + o(\sqrt{h^2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\alpha + \frac{o(|h|)}{h}\right) = \alpha.$$

Allo stesso modo si calcola il secondo

$\lim$ — $= \beta$.

RIASSUMENDO IN UNO SCHEMA

f diff. in (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f cont. in (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ $\exists \nabla f(x_0, y_0)$

ed inoltre

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0,y_0) h - \partial_y f(x_0,y_0) k = o(\sqrt{h^2+k^2})$

$\exists \nabla f(x_0, y_0) \not\Rightarrow f$ cont. in (x_0, y_0)

$\not\Rightarrow f$ diff. in (x_0, y_0)

COME CAPIRE SE UNA FUNZIONE É DIFFERENZIABILE?

1° PASSO Si vede se $\exists \nabla f(x_0, y_0)$.

2° PASSO Se $\nexists \nabla f(x_0, y_0) \Rightarrow$ non è diff. in (x_0, y_0)

Se $\exists \nabla f(x_0, y_0)$ allora bisogna verificare se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0,y_0) h - \partial_y f(x_0,y_0) k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esempio Dire se è differenziabile in $(1,0)$ la funzione $f = x^2 + y^3$.

Il primo passo è ovvio poiché posso scrivere $\nabla f(x,y)$ usando le regole di derivazione in una variabile: $\partial_x f(x,y) = 2x$, $\partial_y f(x,y) = 3y^2$

$\Rightarrow \nabla f(1,0) = (2, 0)$.

Il secondo passo si riduce quindi a capire se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)^2 + k^3 - 1 - 2h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Quindi se tale limite esiste e vale zero abbiamo la differenziabilità. Altrimenti non abbiamo la differenziabilità.

Tornando al limite dobbiamo studiare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)^2+k^3-1-2h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{1}+h^2+\cancel{2h}+k^3\cancel{-1}\cancel{-2h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^3}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\downarrow\, 0} + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\downarrow\, 0} = \boxed{0}$$

Quindi la $f(x,y)$ è diff. in $(1,0)$.

Oss. I due limiti possono essere studiati con le coordinate polari:

$$\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos^2\alpha}{\cancel{\rho}} = \rho\cos^2\alpha \quad e \quad \frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow \frac{\rho^{\cancel{3}\,2}\operatorname{sen}^3\alpha}{\cancel{\rho}} = \rho^2\operatorname{sen}^3\alpha$$

Esercizio Studiare la diff. di f in $(0,0)$ dove

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{in } (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo già visto che f non è continua in $(0,0)$ poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\nexists$ e quindi per il teo. visto f non può essere differenziabile in $(0,0)$.

Per capire se $f(x,y)$ è differenziabile oppure no in $(0,0)$ si potrebbe anche procedere secondo lo schema precedente:

1° PASSO $\nabla f(0,0)$ esiste e vale $(0,0)$ (calcolo già fatto prima)

2° PASSO Verificare se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

ossia

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

e vediamo usando le polari che questo non è vero! Infatti il limite non esiste.

Infatti usando le polari

$$\frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \rightsquigarrow \frac{\rho^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\rho^3} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho^2}$$

Quindi ad esempio se $\sigma = 0 \Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho^2} = \boxed{0}$

se $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho^2} = \boxed{\frac{1}{2\rho^2} \xrightarrow{\rho\to 0} +\infty}$

Esercizio Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è diff. la funzione $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Noi sappiamo che se $(x,y) \neq (0,0) \Longrightarrow$

$$\boxed{\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2 y}{(x^2+y^2)^2}} \quad e \quad \boxed{\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2y^2 x}{(x^2+y^2)^2}}$$

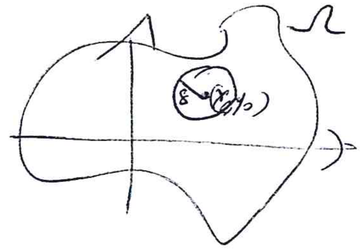
Quindi per capire se f è diff. in $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ bisognerebbe studiare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{(x_0+h)(y_0+k)}{(x_0+h)^2+(y_0+k)^2} - \dfrac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2} - \dfrac{\left(y_0(x_0^2+y_0^2) - 2x_0^2 y_0\right)}{(x_0^2+y_0^2)^2}h - \dfrac{\left(x_0(x_0^2+y_0^2) - 2y_0^2 x_0\right)}{(x_0^2+y_0^2)^2}k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e vedere per quali (x_0,y_0) tale limite vale 0!

In questa situazione può essere di grande aiuto il teorema del differenziale totale!

Per semplicità lo enunciamo in 2 variabili ma vale più in generale in n variabili.



Teo. (Differenziale Totale)

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data.

Supponiamo che $\exists\, \delta > 0$ t.c.

i) $\exists\, \partial_x f(x,y)$ e $\partial_y f(x,y)$ $\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$

ii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(x_0,y_0)$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(x_0,y_0)$

Ossia $\exists\, \nabla f(x,y)$ in un un intorno di (x_0,y_0) e $\nabla f(x,y)$ è continuo in (x_0,y_0).

Allora f è diff. in (x_0,y_0)

Oss. Per studiare la diff. di $\frac{xy}{x^2+y^2}$ fuori dall'origine ossia in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ basta osservare che

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)-2y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ e che queste funzioni ricadono nel megateorema sulla continuità, ossia sono continue nel loro dominio naturale: ossia in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pertanto tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sono di differenziabilità.

Oss. Il teo. del diff. totale è una condizione sufficiente ma non necessaria per la differenziabilità.

Oss. Se $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

allora il teorema del differenziale totale è poco efficace in $(0,0)$ dato ad esempio $f(x,y)$ non può essere derivata parzialmente usando le usuali regole di derivazione in una variabile. Infatti $(0,0)$ esce fuori dal dominio "naturale" di $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Pertanto in $(0,0)$ conviene studiare la differenziabilità usando la tecnica vista sopra: verificare se $\exists\, Df(0,0)$ usando i rapporti incrementali ed in caso affermativo studiare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{h^2+k^2} - 0 - \partial_x f(0,0)h - \partial_y f(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Se tale limite esiste e vale 0 allora f è diff. in $(0,0)$, altrimenti non lo è.

DIM. (Teo. differenziale totale)

La dimostrazione si basa sul seguente teorema di Lagrange per funzioni 1 variabile:

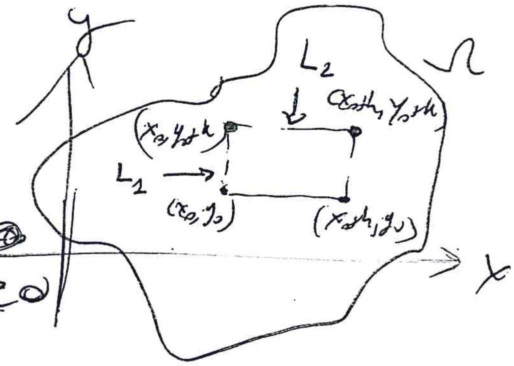
$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sotto opportune ipotesi si ha

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\xi) \quad \text{con } \xi \in [a,b].$$

Usiamo ora questo teo. di una variabile per dedurre info sulla differenziabilità di $f(x,y)$ in un generico (x_0,y_0) assumendo che $\exists\ \partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)$ in $B_\delta(x_0,y_0)$ e che tali funzioni derivate parziali siano continue in (x_0,y_0).

Nostro scopo è provare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)h-\partial_y f(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$



Usiamo Lagrange su L_1 e la funzione $y \to f(x_0,y)$ allora

$$\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k} = \partial_y f(x_0,\eta) \quad \text{con } \eta \in [y_0,y_0+k].$$

Usando Lagrange su L_2 e la funzione $x \to f(x,y_0+k)$ allora

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h} = \partial_x f(\xi,y_0+k) \quad \text{con } \xi \in [x_0,x_0+h].$$

Quindi abbiamo

$$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = k\, \partial_y f(x_0, \eta)$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) = h\, \partial_x f(\xi, y_0+k)$$

$$(\xi, \eta) \in [x_0, x_0+h] \times [y_0, y_0+k].$$

Quindi:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)} + \underbrace{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}$$

$$= h\, \partial_x f(\xi, y_0+k) + k\, \partial_y f(x_0, \eta).$$

Pertanto

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0) h - \partial_y f(x_0, y_0) k =$$

$$= h\, \partial_x f(\xi, y_0+k) + k\, \partial_y f(x_0, \eta) - \partial_x f(x_0, y_0) h - \partial_y f(x_0, y_0) k$$

e quindi la differenziabilità in (x_0, y_0) equivale a

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h\, \partial_x f(\xi, y_0+k) + k\, \partial_y f(x_0, \eta) - \partial_x f(x_0, y_0) h - \partial_y f(x_0, y_0) k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

e il limite precedente può essere così riscritto:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h\, (\partial_x f(\xi, y_0+k) - \partial_x f(x_0, y_0))}{\sqrt{h^2+k^2}} + \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{k\, (\partial_y f(x_0, \eta) - \partial_y f(x_0, y_0))}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

dico che entrambi i limiti fanno zero e quindi concludiamo. Ad esempio per il primo limite ragioniamo come segue:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \partial_x f(\xi, y_0+k) - \partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} G(h,k) \cdot H(h,k)$$

con $G(h,k) = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ che è limitata, poiché $|G(h,k)| \le \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1$. Mentre per ipotesi $\lim_{(h,k) \to (0,0)} H(h,k) = 0$.