Analisi 2 Ingegneria Biomedica $11-01-2021$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.
Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Calcolare il seguente integrale doppio $\int\int_T (1+e^{\frac{y}{x}})dxdy$ dove

$$T = \{(x,y)|1 < x < 3, 0 < y < x\}$$

Esercizio 2 Calcolare il volume del solido in $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando intorno all' asse z il seguente insieme

$$\Omega = \{(y,z)||y-4| + |z-2| < 1\}$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos^2(x+y)-e^{x^2+y^4}}{\ln(1+x^2+y^2)}$

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Trovare l' insieme dei punti critici della funzione

$$f : \{(x,y,z)|x > 0, y > 0, z > 0\} \to \mathbb{R}$$

definita come segue $f(x,y,z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$. Studiare la natura di tali punti critici.

Esercizio 5 Calcolare il seguente integrale doppio $\int\int_\Omega xydxdy$ dove

$$A = \{(x,y)|x > 0, y > x^2, x^2+y^2 < 1\}$$

Soluzioni

1. $4e$

2. 16π

3. N.E.

4. Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{z}{(z+x)^2} \\ \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{z}{(y+z)^2} \\ \frac{x}{(x+z)^2} = \frac{y}{(y+z)^2} \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni deduciamo che

$$x(y+z)^2 = y(z+x)^2 \iff xy^2+xz^2 = yz^2+yx^2 \iff xy(y-x) = z^2(y-x)$$

e quindi abbiamo due alternative: $y = x$ oppure $xy = z^2$.
Similmente usando seconda e terza abbiamo le seguenti possibilita': $y = z$ oppure $yz = x^2$.

Procediamo quindi analizzando tutti i casi: se $y = x$ e $y \neq z$ allora $yz = x^2$ che (essendo $y = x$) implica $z = x$ e quindi necessariamente $x = y = z$. Se invece assumiamo $xy = z^2$ e $x \neq y$ allora avremmo o che $y = z$ e quindi (essendo $xy = z^2$) $x = y = z$ oppure che $yz = x^2$. Ma allora facendo il rapporto tra $xy = z^2$ e $yz = x^2$ allora $\frac{x}{z} = \frac{z^2}{x^2}$ e quindi $x = z$. Ma allora da $yz = x^2$ anche $y = x$. In ogni caso avremmo $x = y = z$.

Quindi i punti critici sono dati dal seguente insieme:

$$\{(x, y, z)|x = y = z > 0\}$$

Tali punti critici sono di sella. Infatti su tali punti la funzione vale $\frac{3}{2}$. Inoltre vale la seguente identita':

$$f(x, y, z) + f(y, x, z) = 3.$$

Se quindi consideriamo

$$C_\epsilon = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z > 0, \max\{|x - y|, |y - z|\} < \epsilon\}$$

allora ci sono due alternative: la funzione f vale identicamente $\frac{3}{2}$ sul cono

$$\tilde{C}_\epsilon = \{(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{y}, \lambda\bar{z})|(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in C_\epsilon, \lambda > 0\}$$

oppure in tale cono ci sono punti in cui la f prende sia valori $> \frac{3}{2}$ sia valori $< \frac{3}{2}$ in vista della relazione $f(x, y, z) + f(y, x, z) = 3$ e tenuto conto del fatto che se $(x, y, z) \in \tilde{C}_\epsilon$ allora $(y, x, z) \in \tilde{C}_\epsilon$. Ma la possibilita' che f valga identicamente $\frac{3}{2}$ sul cono $\tilde{C}_\epsilon$ non e' verificata, altrimenti i punti di $\tilde{C}_\epsilon$ sarebbero punti critici, ma questo e' assurdo poiche' abbiamo detto che i punti critici sono dati dall' insieme $\{(x, y, z)|x = y = z > 0\}$.

5. Abbiamo che

$$A = \{(x, y)|0 < x < \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, x^2 < y < \sqrt{1 - x^2}\}$$

e quindi l' integrale diventa

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} x(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} ydy)dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \frac{x}{2}(1 - x^2 - x^4)dx$$

$$= [\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \ldots$$