RISULTATI SCRITTO ANALISI II
DEL 16-06-2016

SONO RIPORTATI DI SEGUITO SOLO I VOTI SUFFICIENTI.
TUTTI GLI ALTRI SONO INSUFFICIENTI

1) 510435 / 21
2) 480126 / 28
3) 472674 / 19
4) 504581 / 18
5) 533217 / 26
6) 505815 / 21
7) 532555 / 22
8) 519949 / 26
9) 517109 / 23
10) 508293 / 19
11) 536960 / 24
12) 454364 / 20
13) 518698 / 21
14) 517632 / 19
15) 534472 / 25
16) 536595 / 23
17) 535148 / 18
18) 532277 / 24
19) 542472 / 20
20) 530684 / 21
21) 518789 / 18
22) 476001 / 19
23) 518717 / 19
24) 504344 / 19
25) 521852 / 18
26) 531220 / 22
27) 523839 / 20
28) 518832 / 21
29) 518962 / 18
30) 522817 / 20
31) 494099 / 18
32) 524666 / 18

33) 533080 | 20

34) 503231 | 18

35) 539252 | 22

36) 519722 | 18

37) 522184 | 18

38) 522627 | 19

39) 509488 | 23

40) 521291 | 21

41) 532260 | 30

42) 511390 | 20

43) 501514 | 22

44) 504496 | 19

45) 516939 | 20

46) 516868 | 18

SOLUZIONI

TEST e

PROVA SCRITTA

PARTE A

1. Il seguente integrale $\int\int\int_A xyzdxdyz$ dove
$$A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$
vale:
A: 1/9 B: 2 C: 1/5 D: N.A. E: 1/8

2. L' integrale $\int\int_A xdxdy$ con
$$A = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
vale:
A: $\pi/4$ B: N.A. C: 1 D: $\pi/2$ E: 1/3

3. La seguente derivata
$$\frac{\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} f(0,0),$$
dove $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ vale:
A: 2 B: 6 C: N.A. D: 0 E: -4

4. Sia data la superficie definita implicitamente come $\{\Phi(x,y,z) = 0\}$ dove
$$\Phi(x,y,z) = e^{xyz} - 1.$$
Allora il piano tangente nel punto $(0,1,1)$ è:
A: $x + 2y + 2z = 3$ B: $x + y - z = 1$ C: N.A. D: $x + y - 7z = 1$ E: $x = 0$

5. Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y$, allora il punto $(0,0)$ e':
A: minimo assoluto B: critico ma non minimo assoluto C: massimo assoluto D: massimo relativo E: N.A.

6. L' area della regione
$$A = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, y \geq x, 0 \leq x \leq 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$
vale:
A: 2π B: π C: N.A. D: 2 E: $\pi/2$

7. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(\ln(|x| + |y|))$ vale:
A: 1 B: 2 C: N.A. D: 1/2 E: 0

8. Il flusso del campo $\vec{F} = (-y, x, z)$, lungo la superficie
$$\{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
orientata secondo la normale esterna, vale:
A: π B: 4 C: 4π D: N.A. E: $4/3\pi$

9. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sin(xy)}$ vale:
A: 0 B: 1/2 C: 1/3 D: N.A. E: 1

10. Consideriamo $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$. Allora il gradiente di f nel punto $(0,0)$ vale:
A: N.A. B: $(0,1)$ C: $(1,0)$ D: N.E. E: $(0,0)$

CODICE=333633

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

16 giugno 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=333633

Es. Sia dato il campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$.

Calcolare il flusso di $\vec{F}$ lungo il bordo di

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad z \ge -\frac{1}{2} \right\}$$

orientato secondo la normale esterna.

SOL. Usando il teorema della divergenza

siamo ridotti a calcolare

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = 3 \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2) \, dx\,dy\,dz .$$

Usando le coordinate cilindriche abbiamo:

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} dz \int_{x^2+y^2 \le 1-z^2} (x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} dz \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho^3 \, d\rho\, d\theta + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} z^2 \pi (1-z^2)\, dz =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2\pi \frac{(1-z^2)^2}{4}\, dz + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \pi (z^2 - z^4)\, dz =$$

$$= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{z^4}{2} \cancel{- z^2} \cancel{+ z^2} - z^4 \right) dz = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1-z^4) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2} - \left[\frac{z^5}{5} \right]_{-\frac{1}{2}}^{1} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^5}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{16\times 15 - 32 - 1}{5\cdot 2^5}\right) .$$

Quindi l'integrale cercato vale:

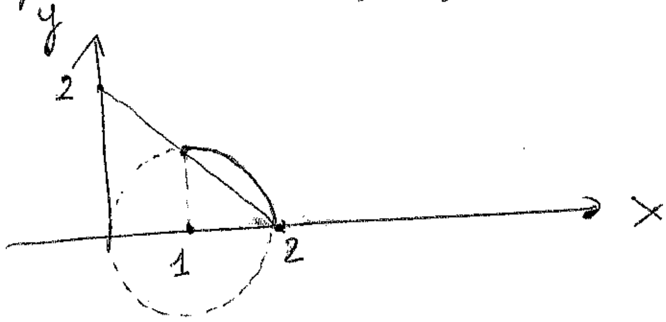
$$\frac{3}{2}\pi\left(\frac{16\times 15 - 32 - 1}{5\cdot 2^5}\right) = \frac{3\pi}{2^6\cdot 5}\left(16\times 13 - 1\right) =$$

$$= \boxed{\frac{3\pi}{2^6\cdot 5}\cdot 207}$$

Es. Calcolare il seguente integrale di prima specie:

$$\int_\gamma \frac{x}{y+1}\, ds \quad \text{dove} \quad \gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2-2x=0 \\ x+y\geq 2 \end{array}\right\}.$$

SOL. Rappresentiamo graficamente γ:



Usando le coordinate polari (traslate in $(1,0)$) abbiamo che γ si può parametrizzare come:

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ni \theta \longrightarrow (1+\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{x}{y+1}\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\sqrt{(-\operatorname{sen}\theta)^2+(\cos\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta + \left[\ln(1+\operatorname{sen}\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cancel{\left[\operatorname{tg}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta + \ln 2 =$$

$$= \left[\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \left[\frac{\operatorname{sen}\theta - 1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \boxed{1+\ln 2}.$$

ES. Calcolare $\min_A f$ e $\max_A f$ dove

$$f(x,y) = (x+y)^3 \quad , \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2xy+2y^2 \leq 4\}.$$

SOL. Cerchiamo prima i punti interni in cui si annulla il gradiente:

$$\partial_x f = 3(x+y)^2 \, , \; \partial_y f = 3(x+y)^2 \Longrightarrow \nabla f(x,y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = -y \, .$$

Quindi i punti in cui si annulla il gradiente sono del tipo $(x,-x)$ e abbiamo $f(x,-x) = 0$.

Lavoriamo ora sulla frontiera con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \partial_x f = \lambda \partial_x g \\ \partial_y f = \lambda \partial_y g \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad g(x,y) = x^2+2xy+2y^2-4$$

Esplicitando $f(x,y)$ e $g(x,y)$ troviamo:

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 = 2\lambda x + 2\lambda y \\ 3(x+y)^2 = 2\lambda x + 4\lambda y \\ x^2+2xy+2y^2 = 4 \end{cases}$$

Usando la prima e la seconda eq. troviamo

$$2\lambda x + 2\lambda y = 2\lambda x + 4\lambda y \iff 2\lambda y = 0$$

Quindi abbiamo due casi:

$\lambda = 0 \longrightarrow (x+y)^2 = 0 \longrightarrow y = -x$ (già trovati imponendo $\nabla f = 0$

$y = 0 \xrightarrow{\text{(usando l'eq. terza)}} x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$.

Quindi sulla frontiera troviamo i punti $(2,0)$ e $(-2,0)$. Inoltre $f(2,0) = 8$ ed $f(-2,0) = -8$

Quindi $\boxed{\max_A f = 8 \quad e \quad \min_A f = -8}$.