Analisi 2 Ingegneria Civile $19 - 02 - 2024$

Esercizio 1

Sia data la seguente famiglia di problemi di Cauchy dipendenti dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u'' + \alpha u' + 4u = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

- calcolare la soluzione nel caso $\alpha = 0$;
- dire per quali valori del paramtero $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione e' limitata sulla semiretta $[0, \infty)$.

Esercizio 2 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xy^4 - arctg(xy)$$

e studiarne la relativa natura (max/min locale, sella).

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A \frac{x^2y^2}{1+z^2} dxdydz$$

dove

$$A = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 < 1, |z| < 1\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il polinomi caratteristico associato all' equazione e'

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + 4$$

il cui discriminante vale $\alpha^2 - 16$. Distinguiamo quindi tre casi:

- $\alpha^2 - 16 = 0$: avremo quindi $\alpha = \pm 4$ e la soluzione generale dell' equazione e' data rispettivamente per $\alpha = -4$ da

  $$ae^{2t} + bte^{2t}$$

  e per $\alpha = 4$ da

  $$ce^{-2t} + dte^{-2t}$$

  Osserviamo che per $\alpha = 4$ per ogni scelta di c, d la soluzione tende a zero per $t \to +\infty$ e quindi e' limitata; nel caso $\alpha = -4$ la soluzione si scrive come segue $(a + bt)e^{2t}$ ed in questo caso la soluzione tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$ a seconda del segno di b e se $b = 0$ allora avremmo la stessa situazione a seconda del segno di a. In ogni caso siccome a, b non possono essere entrambi nulli per via della condizione di Cauchy, avremo che per $\alpha = -4$ la soluzione e' illimitata su $[0, +\infty)$

- $\alpha^2 - 16 > 0$: in questo caso la soluzione si scrive come

  $$ae^{-(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2})t} + be^{-(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2})t}$$

  e quindi se $\alpha > 4$ avremo che gli esponenti degli esponenziali sono negativi e quindi la soluzione e' infinitesima per $t \to +\infty$ e quindi limitata. Se invece $\alpha < -4$ si vede che gli esponenti degli esponenziali sono positivi e quindi la soluzione tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, e pertanto non e' limitatata tranne che $a = b = 0$ ma questa situazione e' sclusa dalla condizione di Cauchy.

- $\alpha^2 - 16 < 0$: In questo caso la soluzione si scrive come

  $$e^{-\frac{\alpha}{2}t}[a\cos(\sqrt{\frac{16 - \alpha^2}{2}}t) + b\sin(\sqrt{\frac{16 - \alpha^2}{2}}t)]$$

In questo caso vediamo che se $\alpha \in [0,4)$ allora la funzione e' limitata essendo prodotto di funzioni trigonometriche limitate per un esponenziale con esponente minore o uguale a zero. Se invece $\alpha \in (-4,0)$ allora la soluzione non e' limitata essendo prodotto di un esponenziale con esponente positivo ed una funzione trigonometrica.

Riassumendo la soluzione e' limitata su $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha \geq 0$.

Esercizio 2

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y^4 + \frac{y}{1+x^2y^2} = 0 \\ 4xy^3 + \frac{x}{1+x^2y^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo l' alternativa $y = 0$ oppure $y^3 + \frac{1}{1+x^2y^2} = 0$. Nel primo caso dalla seconda equazione troviamo $x = 0$. Nel secondo caso avremmo dalla seconda equazione $4xy^3 - xy^3 = 0$ e quindi $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $y = 0$ troviamo il caso gia' da analizzato sopra che implica $x = 0$ altrimenti per $x = 0$ troviamo dalla prima equazione $y^4+y = 0$ ossia $y = 0, -1$. Quindi i punti critici sono $(0,0), (0,-1)$. Calcolando la matrice hessiana in questi punti troviamo nel punto $(0,0)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e nel punto $(0,-1)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi i punti sono di sella essendo il determinante delle matrici negativo.

Esercizio 3

L' integrale si scrive come segue integrando per fili

$$\int\int_{x^2+y^2<1} dxdy(\int_{-1}^{1} \frac{x^2y^2}{1+z^2}dz) = \int\int_{x^2+y^2<1} [x^2y^2arctg(z)]_{z=-1}^{z=1}dxdy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\int_{x^2+y^2<1} x^2y^2dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^5(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2 d\rho d\theta = \frac{\pi}{48}\int_0^{2\pi}(\sin(2\theta))^2 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{96} \int_0^{4\pi} (\sin \eta)^2 d\eta = \frac{\pi^2}{48}$$