Analisi 2 Ingegneria Civile $21 - 07 - 2023$

Esercizio 1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 t}{y^2+4} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Trovare esplicitamente la soluzione $y(t)$ e studiare al variare di $\alpha > 0$ il seguente limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x, y, z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2$$

trovare tutti i punti critici e studiarne la natura.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

dove

$$A = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \cdot y > 0\}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Osserviamo che $y(t) = 0$ e' soluzione dell' equazione (anche se con condizione di Cauchy diversa rispetto a quella imposta nell' esercizio), quindi la soluzione cercata (con condizione $y(0) = 2$) sara' sempre positiva per unicita'. La soluzione e' definita come segue in modo implicito

$$\int_2^{y(t)} \frac{s^s + 4}{s^2} ds = \int_0^t s ds$$

e quindi

$$y(t) - 2 - \frac{4}{y(t)} + 2 = \frac{t^2}{2}$$

dove e' lecito dividere per $y(t)$, restando la soluzione sempre positiva per quanto detto all'inizio. Quindi abbiamo che

$$(y(t))^2 - 4 = y(t)\frac{t^2}{2}$$

da cui

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2}$$

e siccome abbiamo $y(0) = 2$ necessariamente scegliamo il segno $+$ quindi

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} + \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2}$$

Calcoliamo ora il limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t^2}{2} + \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2t^\alpha}.$$

ed osserviamo che il limite si puo' scrivere come segue

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t^2}{2}(1 + \sqrt{1 + \frac{64}{t^4}})}{2t^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{4t^\alpha}$$

quindi il limite dato vale $\frac{1}{4}$ se $\alpha = 2$, vale 0 se $\alpha > 2$ e vale ∞ se $\alpha < 2$.

Esercizio 2 I punti critici sono tutte e solo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(y-1)^3(z+2)^2 = 0 \\ 3x^2(y-1)^2(z+2)^2 = 0 \\ 2x^2(y-1)^3(z+2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo che vale almeno una tra le condizioni: $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$. Se $x = 0$ allora anche le ultime due equazioni sono soddisfatte per ogni (y, z), quindi abbiamo $(0, y, z)$. Similmente se $y = 1$ allora per ogni x, z sono soddisfatte le ultime due equazioni, quindi troviamo $(x, 1, z)$. Infine se $z = -2$ abbiamo che le ultime due equazioni sono soddisfatte per ogni (x, y) da cui troviamo le soluzioni $(x, y, -2)$. Si verifica facilmente che il test dell' hessiano non e' utile per studiare la natura dei punti critici.Il segno della funzione e' stabilito da $(y-1)^3$ (gli altri due fattori sono positivi essendo dei quadrati) quindi, siccome la funzione $x^2(y-1)^3(z+2)^2$ si annulla in tutti i punti critici trovati sopra, si ha che se il punto critico (x, y, z) e' tale che con $y > 1$ allora abbiamo un minimo locale, se abbiamo un punto critico (x, y, z) con con $y < 1$ abbiamo un massimo locale, se $y = 1$ allora il punto $y = 1$ e' di sella per $(y-1)^3$ e quindi e' facile dedurre che sara' di sella anche per la funzione $x^2(y-1)^3(z+2)^2$.

Esercizio 3 La condizione $x \cdot y > 0$ indica il fatto che lavoriamo sul primo e terzo quadrante nel piano $x - y$ e quindi per simmetria l' integrale equivale a fare due volte l'integrale sulla parte di palla tridimensionale la cui proiezione nel piano (x, y) corrisponde al primo quadrante. Quindi l' integrale assegnato si puo' calcolare come segue usando le coordinate sferiche

$$2\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi[\rho^3 \ln(1+\rho^2)]_0^1 - \frac{4}{3}\pi \int_0^1 \frac{\rho^4}{1+\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{2\ln 2}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi \int_0^1 \frac{\rho^4 - 1 + 1}{1+\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{2\ln 2}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi \int_0^1 (\rho^2 - 1) d\rho - \frac{4}{3}\pi \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{2\ln 2}{3}\pi + \frac{8}{9}\pi - \frac{1}{3}\pi^2$$