Analisi 2 Ingegneria Civile $16 - 09 - 2022$

Esercizio 1 Dire, giustificando la risposta, se il seguente integrale improprio e' convergente o divergente:

$$\int\int_A \frac{|x|}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}.$$

Nel caso in cui risultasse convergente, calcolarne il valore esplicito.

Esercizio 2 Sia $u(t)$ l' unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 - u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Descrivere il dominio massimale di esistenza della soluzione (T_-, T_+) , dove $T_\pm \in [-\infty, \infty]$. Calcolare inoltre il seguente integrale

$$\int_0^{T_+} (u(t) - 1) dt$$

dove T_+ ed $u(t)$ sono definiti come sopra.

Esercizio 3 Dire se esistono (giustificando la risposta) $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$K = \{(x,y)|x^2 + 2y^2 + xy \le 1\}, \quad f(x,y) = x + 3y.$$

In caso affermativo calcolare esplicitamente tali valori.

SOLUZIONI

Esercizio 1 Si tratta di studiare

$$\lim_{R\to\infty}\int_{x^2+y^2<1}\frac{|x|}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}}dxdy = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^1\int_\varepsilon^{2\pi}\frac{\rho^2|\cos\theta|}{\rho^{\frac{5}{2}}}d\rho d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}(\int_0^{2\pi}|\cos\theta|d\theta)\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{\rho}}d\rho = 4\lim_{\varepsilon\to 0}[2\sqrt{\rho}]_\varepsilon^1 = 8.$$

Quindi l' integrale converge al valore 8.

Esercizio 2 L' equazione e' a variabili separabili, quindi usando la formula risolutiva abbiamo

$$\int_0^{u(t)}\frac{1}{1-s^2}ds = \int_0^t ds$$

ossia

$$\frac{1}{2}[\ln(\frac{1+s}{1-s})]_0^{u(t)} = t \iff \frac{1+u(t)}{1-u(t)} = e^{2t} \iff u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Quindi abbiamo che la soluzione e' definita su $\mathbb{R}$ e quindi $T_\pm = \pm\infty$. Calcoliamo ora

$$\int_0^{T_+}(u(t)-1)dt = \int_0^\infty(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}-1)dt = \lim_{R\to\infty}-2\int_0^R\frac{1}{e^{2t}+1}dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}-\int_1^{e^{2R}}\frac{1}{s(1+s)}ds = \lim_{R\to\infty}[-\ln s+\ln(1+s)]_{s=1}^{s=e^{2R}}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\ln\frac{1+e^{2R}}{e^{2R}} - \ln 2 = -\ln 2$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $e^{2t} = s$

Esercizio 3 L' insieme K puo' essere scritto come segue:

$$K = \{(x,y)|(x-\frac{y}{2})^2+\frac{7}{4}y^2 \leq 1\}$$

e quindi si deduce the sia x sia y sono limitati. Inoltre K e' chiuso essendo definito come l' insieme dei punti su cui una funzione continua e' ≤ 1. Quindi si puo' applicare il teorema di Weiestrass essendo la funzione $f(x,y)$ continua.

Calcoliamo ora max e min. Siuccome il gradiente di f non si annulla abbiamo che i valori vanno cercati sulla frontiera di K ed usiamo Lagrange. Il primo sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y + x = 0 \\ x^2 + 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

si vede facilmente che non ha soluzione (infatti le prime due equazioni impongono $(x, y) = (0, 0)$ che non soddisfano la terza equazione. Passiamo ora al secondo sistema di Lagrange:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \lambda y \\ 3 = 4\lambda y + \lambda x \\ x^2 + 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Dalla prima (o anche della seconda equazione) si deduce the $\lambda \neq 0$. Inoltre da prima e seconda equazione si deduce che

$$6\lambda x + 3\lambda y = 4\lambda y + \lambda x$$

che, essendo $\lambda \neq 0$, implica $5x = y$. Usando questa relazione nella terza equazione troviamo $x^2 + 50x^2 + 5x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{56}}$. Quindi i punti di massimo e minimo sono $(\frac{1}{\sqrt{56}}, \frac{5}{\sqrt{56}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{56}}, -\frac{5}{\sqrt{56}})$. Quindi abbiamo che $\min_K f = -\frac{16}{\sqrt{56}}$ e $\max_K f = \frac{16}{\sqrt{56}}$.