Analisi 2 Ingegneria Civile $07-06-2024$

Esercizio 1 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2(x^4 + y^4) - (x+y)^2$$

e studiarne la natura (dire se si tratta di max loc., min loc., sella).

Esercizio 2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x\cos^2(y) \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (\frac{6x^2}{\sqrt{y^2+z^2}} - 9x^2y, 9xy^2 - 4yz, 2z^2 + 3x(x^2+y^2))$$

lungo il bordo dell' insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) | \sqrt{4-y^2-z^2} < x < \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2-z^2}, y^2+z^2 > 1\}$$

orientato secondo la normale esterna.

SOLUZIONI

Esercizio 1 I punti critici soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ 8y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

ossia $x^3 = y^3$ e quindi $x = y$. Inserendo questa informazione nella prima equazione troviamo

$$8x^3 - 4x = 0$$

ossia $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi i punti critici sono $(0,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcolando la matrice hessiana nei punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ si trovano due matrici definite positive e quindi si tratta di minimi locali. Nel punto $(0,0)$ invece la matrice hessiana ha tutte le entrate sono tutte uguali a -2, quindi avendo determinante nullo non possiamo concludere usando il criterio della matrice hessiana. Procediamo quindi nel punto $(0,0)$ per restrizioni: se ci mettiamo sulla retta $x + y = 0$ allora la funzione $f(x, -x) = 4x^4 > 0$ se $x \neq 0$; se invece ci mettiamo sull'asse x ossia $y = 0$ allora la restrizione $f(x, 0) = 2x^4 - x^2 = x^2(2x^2 - 1) < 0$ se $x^2 < \frac{1}{2}$. Quindi abbiamo che il punto $(0,0)$ e' di sella poiche' la funzione f puo' assumere in punti arbitrariamente vicini a $(0,0)$ sia valori positivi che valori negativi.

Esercizio 2 L' equazione e' a variabili separabili quindi procedendo con la formula risolutiva abbiamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} \frac{1}{\cos^2(s)} ds = \int_0^x 2s ds$$

da cui

$$\operatorname{tg} y(x) - 1 = x^2$$

e quindi

$$y(x) = \operatorname{arctg}(1 + x^2).$$

Esercizio 3 Osserviamo che

$$div\vec{F} = \frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}} - 18xy + 18xy - 4z + 4z = \frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

quindi per il teorema della divergenza basta calcolare

$$\int\int\int_\Omega \frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}} dxdyz$$

Integriamo descrivendo Ω per fili rispetto all' asse x:

$$\Omega = \{(x, y, z)|(y, z) \in A, \sqrt{4 - y^2 - z^2} < x < \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2 - z^2}\}$$

dove

$$A = \{(y, z)|1 < y^2 + z^2 < 4\}.$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int\int_A dydz(\int_{\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2-z^2}} \frac{12x}{\sqrt{y^2+z^2}} dx)dydz$$

$$= 6\int\int_A \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}[\frac{9}{4}(4 - y^2 - z^2) - (4 - y^2 - z^2)]dydz$$

$$= \frac{15}{2}\int\int_A \frac{4 - y^2 - z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} dydz$$

ed usando le polari

$$\cdots = \frac{15}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (4-\rho^2)d\rho d\theta = 15\pi[4\rho - \frac{\rho^3}{3}]_1^2 = 15\pi[8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}] = 15\pi[4 - \frac{7}{3}] = 25\pi.$$