Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^t y'(t) = t e^{y(t)} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Scrivere la soluzione al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione nel caso $\alpha = 0$.

a) Riscriviamo l'equazione come $y'(t) = e^{y(t)} \cdot te^{-t}$ e osserviamo che è un'equazione a variabili separabili.

Pertanto la soluzione è data da

$$\int_\alpha^{y(t)} e^{-y}\,dy = \int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau \Rightarrow -e^{-y(t)} + e^{-\alpha} = \int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau$$

Calcoliamo $\int_0^\tau \tau e^{-\tau}\,d\tau$ integrando per parti:

$$\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau = \left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^t - \int_0^t - e^{-\tau}\,d\tau = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

Quindi otteniamo che

$$-e^{-y(t)} + e^{-\alpha} = -te^{-t} - e^{-t} + 1 \Rightarrow e^{-y(t)} = e^{-\alpha} + te^{-t} + e^{-t} - 1$$

$$\Rightarrow y(t) = -\log\left(e^{-\alpha} + te^{-t} + e^{-t} - 1\right).$$

b) Nel caso $\alpha=0$ la soluzione risulta essere

$$y(t) = -\log(1 + te^{-t} + e^{-t} - 1),$$

Semplificando otteniamo

$$y(t) = -\log(te^{-t} + e^{-t}) = -\log((t+1)e^{-t}) = t - \log(t+1),$$

che è definita per $t > -1$ con $y(t) \to +\infty$ per $t \to -1^+$

Quindi l'intervallo massimale di esistenza è $I = (-1, +\infty)$

Esercizio 2. Determinare in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ risulta differenziable la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Come prima cosa, osserviamo che per ogni punto (x,y) con $x \neq 0$, esiste un intorno in cui $f(x,y)$ si scrive come "combinazione" (più precisamente quoziente, prodotto e composizione) di funzioni elementari che sono differenziabili, e in cui il denominatore non si annulla. Quindi f è differenziabile in ogni (x,y) con $x \neq 0$.

Studiamo quindi la differenziabilità nei punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$, cioè nell'asse y.

Consideriamo prima il caso in cui $y_0 \neq 0$ e controlliamo se esistono le derivate parziali.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{|h|\, y_0^2}{\sqrt{h^2+y_0^2}} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \cdot \frac{y_0^2}{\sqrt{h^2+y_0^2}}$$

Notiamo che $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} \cdot \frac{y_0^2}{\sqrt{h^2+y_0^2}} = 1 \cdot |y_0|$, mentre $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \cdot \frac{y_0^2}{\sqrt{h^2+y_0^2}} = -1 \cdot |y_0|$.

Dato che $y_0 \neq 0$, i due limiti non coincidono, quindi la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ non esiste.

Ne segue che f non può essere differenziabile nei punti $(0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

Infine, consideriamo il punto $(0,0)$. Osserviamo che f è continua, in quanto $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{y^2}_{\to 0} = 0$

Osserviamo anche che

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ e $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Controlliamo quindi il limite della definizione di differenziabilità

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|h|k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{|h|}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{k^2}{h^2+k^2}}_{\leq 1} = 0.$$ Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

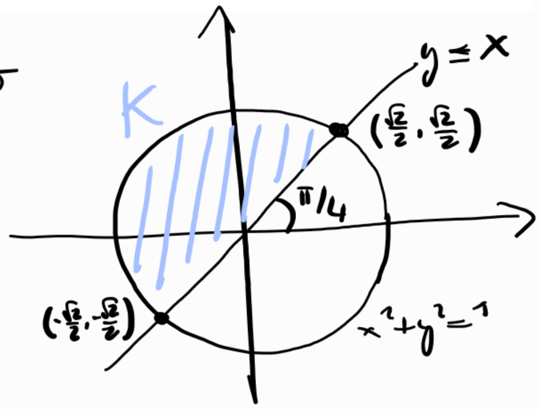
Ricapitolando, f è differenziabile nei punti (x,y) con $x \neq 0$ e in $(0,0)$, mentre non è differenziabile nei punti $(0,y)$ con $y \neq 0$.

Esercizio 3. Siano

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^3, \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq x\}.$$

Determinare il massimo e il minimo della funzione f sull'insieme K, e tutti i punti in cui f assume tali valori.

Osserviamo che K è il semicerchio formato dall'intersezione tra il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine e il semipiano $y \geq x$, che è delimitato dalla retta $y = x$.



Quindi K è chiuso (perché il complementare $K^c = \{x^2+y^2>1\} \cup \{y<x\}$ è aperto oppure, equivalentemente, perché contiene il suo bordo) ed è limitato (perché è contenuto nel cerchio $\{x^2+y^2 \leq 1\}$).

Inoltre f è continua (è un polinomio), quindi ha certamente punti di massimo e di minimo su K, e possiamo cercarli tra i punti critici interni e i punti di massimo e minimo sul bordo.

Punti critici interni: Calcoliamo $\nabla f(x,y) = (6x, 12y^2)$

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ 12y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to (0,0)$$ non è interno ma sta sul bordo, quindi comunque lo ritroveremo studiando il bordo

Bordo: Il bordo è composto da due pezzi: una semicirconferenza e un segmento, che possiamo parametrizzare come:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$$

$$\gamma_2(t) = (t, t) \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Su γ_1 abbiamo $f(\gamma_1(t)) = 3\cos^2 t + 4\sin^3 t$.

Studiamo la derivata

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) = -6\cos t \sin t + 12\sin^2 t \cos t = 6\cos t \sin t (2\sin t - 1)$$

Per $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ $\frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) = 0 \iff t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \pi\right\}$

Quindi i punti critici di f ristretta alla semicirconferenza sono

$$\gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1), \quad \gamma_1\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \gamma_1(\pi) = (-1, 0).$$

Su γ_2 abbiamo $f(\gamma_2(t)) = 3t^2 + 4t^3$, quindi

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) = 6t + 12t^2 = 0 \iff t \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$$

e osserviamo che $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \subset \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Quindi troviamo i punti $\gamma_2(0) = (0,0)$ e $\gamma_2(-1/2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

A questi dobbiamo aggiungere gli estremi dei due tratti di bordo cioè le intersezioni tra la circonferenza e la retta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$3x^2 + 4y^3$

Calcoliamo f sui punti trovati

$f(0,1) = 4$ $\quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$ $\quad f(-1,0) = 3$ $\quad f(0,0) = 0$ $\quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ $\qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$

Quindi il minimo è 0, ottenuto in $(0,0)$ e il massimo è 4, in $(0,1)$.