Esercizio 1. Determinare se i seguenti campi vettoriali sono conservativi e, in caso affermativo, calcolarne tutte le primitive:

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2} + y, x + \frac{2y}{1+y^2}\right), \qquad \vec{F}_2(x,y,z) = \left(2xyz, x^2z, xy\right).$$

Osserviamo che F_1 e' irrotazionale, poiché $\frac{\partial (F_1)_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial (F_1)_2}{\partial x}$. Dato che il suo dominio e' tutto $\mathbb{R}^2$, che e' semplicemente connesso, F_1 e' conservativo.

Per trovarne le primitive, integriamo prima la prima componente, per cui otteniamo che $U(x,y) = \arctan(x) + xy + c(y)$

Ora imponiamo che $\frac{\partial U}{\partial y} = x + \frac{2y}{1+y^2}$, per cui segue che $c'(y) = \frac{2y}{1+y^2}$ e quindi $c(y) = \log(1+y^2) + K$, dove $K \in \mathbb{R}$ e' una costante arbitraria. Abbiamo quindi ottenuto che le primitive di F_1 sono date da

$$U(x,y) = \arctan(x) + xy + \log(1+y^2) + K.$$

Per quanto riguarda F_2, osserviamo che non e' un campo irrotazionale, in quanto $\frac{\partial (F_2)_3}{\partial y} = x$ ma $\frac{\partial (F_2)_2}{\partial z} = x^2$.

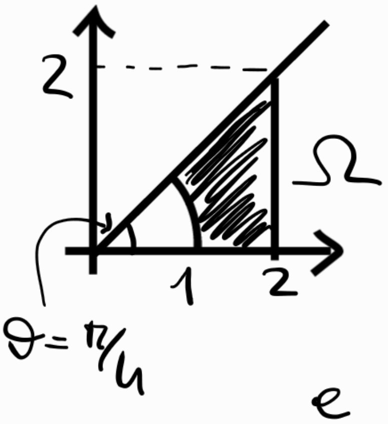
Quindi F_2 non e' conservativo.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_\Omega x\,dxdy,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 2,\ x^2+y^2 \ge 1\}.$$



Osserviamo che

$\Omega = T \setminus S$, dove

$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 2\}$ e' un triangolo

e $S = \{(x,y)\in T : x^2+y^2<1\}$ e' un settore circolare.

Quindi $$\iint_\Omega x\,dxdy = \iint_T x\,dxdy - \iint_S x\,dxdy.$$

Calcoliamo il primo integrale doppio scrivendo T come insieme normale, ad esempio rispetto all'asse y, cioe'

$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ 0\le y\le x\}$. Quindi

$$\iint_T x\,dxdy = \int_0^2 dx \int_0^x x\,dxdy = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

Per calcolare l'integrale su S usiamo le coordinate polari

$$\iint_S x\,dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/4} d\vartheta\ \rho\cos\vartheta\cdot\rho = \int_0^1 d\rho\ \rho^2 \int_0^{\pi/4}\cos\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 d\rho\ \rho^2\left[\sin\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/4} = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2}\rho^2\,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Quindi $$\iint_\Omega x\,dxdy = \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_\Omega yz\,dxdydz,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0,\ y \leq x\}.$$

Osserviamo che Ω è l'intersezione della palla di raggio 2 centrata nell'origine con i due semispazi $\{z \geq 0\}$ e $\{y \leq x\}$. Questo dominio si può descrivere efficacemente in coordinate sferiche, dato che $z \geq 0$ corrisponde a $\varphi \in [0, \pi/2]$ e $y \leq x$ corrisponde a $\vartheta \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}]$.

Quindi

$$\iiint_\Omega yz\,dxdydz = \int_0^2 d\rho \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi\, (\rho \sin\varphi \sin\vartheta) \cdot (\rho\cos\varphi) \cdot \rho^2 \sin\varphi$$

$$= \int_0^2 \rho^4\, d\rho \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\pi/4} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_{\vartheta=-\frac{3}{4}\pi}^{\vartheta=\pi/4} \cdot \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{32}{15}\sqrt{2}$$