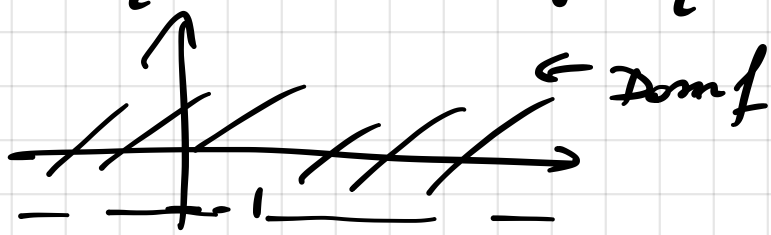
COMPITINO 05-12-2020

ESERCIZIO 1 Data $f(x,y) = |x| \ln(1+y)$ rappresentare graficamente il dominio naturale e studiarne la differenziabilità.

Sol. $\text{Dom} f = \{(x,y) \mid 1+y>0\} = \{(x,y) \mid y>-1\}$



Differenziabilità: se $x \neq 0$ allora

$f(x,y) = x \ln(1+y)$ se $x>0$

$f(x,y) = -x \ln(1+y)$ se $x<0$

in ogni caso se $x \neq 0$ posso derivare $f(x,y)$ in un intorno e osservo che le derivate sono continue. Quindi diff per il differenziale totale.

$\boxed{x=0}$ $x=0$ ed $y=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(h,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,k)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = 0$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\ln(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \ln(1+k) \to 0$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

quindi ho il prodotto di infinitesima per limitata

$\Rightarrow$ infinitesima

$\Rightarrow f$ è diff in $(0,0)$.

$\boxed{(0,y_0) \text{ con } y_0 \neq 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y_0) - \overset{=0}{f(0,y_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|\,\overset{\neq 0}{\ln(1+y_0)}}{h} = \nexists$$

$\Rightarrow \nexists\, \nabla f(0,y_0)$ se $y_0 \neq 0$.

Quindi riassumendo f è diff. in

$$\boxed{\{(x,y) \mid x \neq 0 \text{ e } y > -1\} \cup \{(0,0)\}.}$$

Esercizio 2

Data $f(x,y) = x^2 + y^3 - x(5+y)$ trovare i punti critici e studiarne la natura locale.
Dire inoltre se f ammette max e/o min assoluto su $\mathbb{R}^2$.

Sol. $\nabla f = (2x-5-y,\ 3y^2-x)$

$$\begin{cases} 2x-5-y=0 \\ 3y^2=x \end{cases} \to 6y^2-5-y=0 \;\begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -\frac{5}{6} \end{matrix}$$

$$\boxed{(3,1)\ ,\ \left(\frac{25}{12}, -\frac{5}{6}\right)}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$

$$Hf(3,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \det > 0 \\ \mathrm{tr} > 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{min loc.}$$

$$Hf\left(\frac{25}{12}, -\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \det < 0 \Rightarrow \text{sella.}$$

Osserviamo anche che per $x=0$, $f(0,y) = y^3$ ma $\lim_{y \to \pm\infty} y^3 = \pm\infty \Rightarrow \nexists \max_{\mathbb{R}^2} f, \min_{\mathbb{R}^2} f$.

Esercizio 3 Dire se $\exists$ $\max_K f$ e $\min_K f$

dove $f(x,y) = x+3y$, $K = \{(x,y) \mid x^2+2y^2+xy \le 1\}$.

Calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$.

Sol. f è cont. K è chiuso e limitato.

Per provare che è limitato osservo che

$$x^2+2y^2+xy = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{4}\right)y^2 =$$

$$= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2$$

$$\Rightarrow K = \left\{(x,y) \mid \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 \le 1\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}y^2 \le 1 \Rightarrow \boxed{|y| \le \frac{2}{\sqrt{7}}}$$

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \le 1 \Rightarrow \left|x+\frac{y}{2}\right| \le 1$$

$$\Rightarrow \boxed{|x|} \le \left|x+\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right| \le \left|x+\frac{y}{2}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| \le \boxed{1+\frac{1}{\sqrt{7}}}.$$

Calcolo ora $\max_K f$ e $\min_K f$.

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ 3 = 0 \end{cases}$$ impossibile.

In ∂K uso i moltiplicatori di Lagrange:

$$1^\circ \begin{cases} 2x+y=0 \\ 4y+x=0 \\ x^2+2y^2+xy-1=0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\det\neq 0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x=y=0 \Downarrow \text{impossibile}$$

$$2^\circ \begin{cases} 1=\lambda(2x+y) \\ 3=\lambda(4y+x) \\ x^2+2y^2+xy-1=0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda\neq 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda}=2x+y \\ \frac{1}{\lambda}=\frac{4}{3}y+\frac{x}{3} \\ x^2+2y^2+xy-1=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x+y=\frac{4}{3}y+\frac{x}{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{3}y=\frac{5}{3}x \Longrightarrow y=5x \\ x^2+2y^2+xy-1=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ 2ª eq.

$$x^2+50x^2+5x^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{56}}$$

Quindi trovo le seguenti sol.:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{56}},\frac{5}{\sqrt{56}}\right)}_{P_1},\ \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{56}},-\frac{5}{\sqrt{56}}\right)}_{P_2}$$

$$f(P_1)=\frac{1}{\sqrt{56}}+\frac{15}{\sqrt{56}}=\frac{16}{\sqrt{56}} \longleftarrow \text{max}$$

$$f(P_2)=-\frac{1}{\sqrt{56}}-\frac{15}{\sqrt{56}}=-\frac{16}{\sqrt{56}} \longleftarrow \text{min}$$