COMPITO DI ANALISI II

ING. CIVILE 17-02-2023

1) Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_{\Omega} \frac{x^2 e^z}{1+z^2}\, dx\,dy\,dz$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid |z| \leq 1 ,\ x^2+y^2 \leq 1+z^2\}.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u' = u^2 - 1 \\ u(0) = a \end{cases}$$

Trovare tutti i valori di a per cui la sol. è definita su tutta la retta $\mathbb{R}$.

3) Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ è differenziabile la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} x^2 y & \text{se } y \geq 0 \\ \frac{e^{xy}-1}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Es. 1

Integrando per sezioni si trova

$$\int_{-1}^{1} dz \iint_{x^2+y^2\le 1+z^2} \frac{x^2 e^z}{1+z^2}\, dx\, dy$$

e in polari diventa

$$\int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho^3 \cos^2\theta \, \frac{e^z}{1+z^2}\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \left[\frac{\pi}{4}(1+z^2)e^z\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}(e-e^{-1}) + \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} z^2 e^z$$

Usando l'integrazione per parti

si trova:

$$\int_{-1}^{1} z^2 e^z\, dz = -\int_{-1}^{1} 2z\, e^z\, dz + \left[e^z z^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= -2\int_{-1}^{1} z e^{z} + e - e^{-1} =$$

$$= +2\int_{-1}^{1} e^{z}\, dz - 2\left[z e^{z}\right]_{-1}^{1} + e - e^{-1}$$

$$= 2(e - e^{-1}) - 2[e + e^{-1}] + e - e^{-1}$$

e quindi l'integrale dato vale

$$\frac{\pi}{4}\left(4(e-e^{-1}) - 2(e+e^{-1})\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(2e - 6e^{-1}\right) = \frac{\pi}{2}\left(e - 3e^{-1}\right).$$

$\boxed{\text{Es. 2}}$ Osserviamo che per $a = \pm 1$ abbiamo le sol. costanti $u = \pm 1$.

Consideriamo quindi per prima il caso $\boxed{a \in (-1,1)}$. In tal caso per il teo di esistenza e unicità si ha $u(x) \in (-1,1)$ e quindi

$$\int_a^{u(x)} \frac{1}{s^2-1}\,ds = x \iff \int_a^{u(x)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\frac{ds}{2} = x$$

$$\iff \left[\ln\left(\frac{|1-s|}{|1+s|}\right)\right]_a^{u(x)} = 2x$$

$$\iff \ln\left(\frac{|1-u(x)|}{|1+u(x)|}\right) = \ln\left(\frac{|1-a|}{|1+a|}\right) + 2x$$

e siccome $u(x) \in (-1,1)$ si trova

$$\frac{1-u(x)}{1+u(x)} = \left(\frac{1-a}{1+a}\right) e^{2x}$$

$$\iff 1-u(x) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right) e^{2x}(1+u(x))$$

$$\iff 1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)e^{2x} = u(x)\left(1+\frac{1-a}{1+a}e^{2x}\right)$$

$$\iff u(x) = \frac{(1+a)-(1-a)e^{2x}}{(1+a)+(1-a)e^{2x}}$$

e come si vede se $a \in (-1,1)$ il denom.

non si annulla mai quindi $u(x)$ è

definita globalmente su $\mathbb{R}$.

Se $\boxed{a \in (1,\infty)}$ allora ragionando come sopra si ha:

$$\ln\left|\frac{1-u(x)}{1+u(x)}\right| = \ln\left(\frac{|1-a|}{|1+a|}\right) + 2x$$

e quindi, essendo $u(x) \in (1,\infty)$ per il teo. di esistenza e unicità, si ha

$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)e^{2x}$$

$$\Longleftrightarrow u(x)-1 = (u(x)+1)\left(\frac{a-1}{a+1}\right)e^{2x}$$

$$\Longleftrightarrow u(x)\left(1-\frac{a-1}{a+1}e^{2x}\right) = 1+\frac{a-1}{a+1}e^{2x}$$

$$\Longleftrightarrow u(x) = \frac{(a+1)+(a-1)e^{2x}}{(a+1)-(a-1)e^{2x}}$$

e si vede facilmente che, essendo $a+1$ ed $(a-1)$ positivi, il denominatore si deve annullare. Quindi la sol.

non può essere definita su $\mathbb{R}$ se $a \in (1, \infty)$. Discorso simile si può ripetere per $\boxed{a \in (-\infty, -1)}$. Infatti in tal caso $u(x) \in (-\infty, -1)$ e quindi ragionando come sopra

$$\left| \frac{u(x)-1}{u(x)+1} \right| = \left| \frac{1-a}{1+a} \right| e^{2x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \left(\frac{a-1}{a+1}\right) e^{2x}$$

$$\Updownarrow$$

$$u(x) - 1 = \frac{(a-1)}{(a+1)} e^{2x} (u(x)+1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad u(x) \left(1 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right) e^{2x} \right) = \frac{a-1}{a+1} e^{2x} + 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad u(x) = \frac{(a-1) e^{2x} + (a+1)}{(a+1) - (a-1) e^{2x}}$$

quindi il denominatore si annulla per $a \in (-\infty, -1)$ e la sol. non è definita su $\mathbb{R}$.

Es. 3 Per $\boxed{y \neq 0}$ la funzione è chiaramente diff. poiché si rappresenta come combinazione di funzioni che possono essere derivate infinite volte, e quindi possiamo usare il differenziale totale.

Restano i punti $\boxed{(x,0)}$.

Fissato quindi $(x_0,0)$ è facile vedere che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\geq 0}} f(x,y) = x_0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} f(x,y) = x_0$$

quindi f è continua in $(x_0,0)$.

Per la differenziabilità osserviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-x_0}{h} = \boxed{1}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h}$$

studiamo questo limite prima per $h\to 0^+$ e poi per $h\to 0^-$.

Abbiamo quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x_0+\frac{1}{2}x_0^2 h - x_0}{h} = \frac{1}{2}x_0^2$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{e^{x_0 h}-1}{h} - x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{x_0 h}-1-h x_0}{h^2} = \frac{1}{2}x_0^2.$$

Quindi abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \frac{1}{2} x_0^2.$$

Resta da verificare se è vero o è falso che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

A tal fine osserviamo che basta studiare i due limiti:

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k\geq 0}} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k< 0}} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Il primo si riduce a studiare

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k\geq 0}} \frac{(x_0+h) + \frac{1}{2}(x_0+h)^2 k - x_0 - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k>0}} \frac{\frac{1}{2}h^2k + x_0hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \boxed{0}$$

Per l'altro limite si ha

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k<0}} \frac{f(x_0+h,k)-f(x_0,0)-h-\frac{1}{2}x_0^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k<0}} \frac{\frac{e^{(x_0+h)k}-1}{k} - x_0 - h - \frac{1}{2}x_0^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k<0}} \frac{e^{(x_0+h)k}-1-kx_0-kh-\frac{1}{2}x_0^2k^2}{k\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k<0}} \frac{\frac{1}{2}(x_0+h)^2k^2 + o(\|k\|^2) - \frac{1}{2}x_0^2k^2}{k\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k<0}} \frac{\frac{1}{2}h^2k^2 + x_0hk^2 + o(\|k\|^2)}{k\sqrt{h^2+k^2}} = \boxed{0}.$$

Quindi la f è diff. in $\boxed{(x_0,0)}$.