

1) Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_{\Omega} \frac{x^2 e^z}{1+z^2} dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid |z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2 \}.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u' = u^2 - 1 \\ u(0) = a \end{cases}$$

Trovare tutti i valori di a per cui la sol. è definita su tutta la retta \mathbb{R} .

3) Dire in quali punti di \mathbb{R}^2 è differenziabile la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} x^2 y & \text{se } y \geq 0 \\ \frac{e^{xy} - 1}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Es. 1

Integrando per sezioni si trova

$$\int_{-1}^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1+z^2} \frac{x^2 e^z}{1+z^2} dx dy$$

e in polari diventa

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho^3 \cos^2 \theta \frac{e^z}{1+z^2} d\rho d\theta$$

$$= \int_{-1}^1 dz \left[\frac{\pi}{4} (1+z^2) e^z \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} (e - e^{-1}) + \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 z^2 e^z$$

Usando l'integrazione per parti

si trova:

$$\int_{-1}^1 z^2 e^z dz = - \int_{-1}^1 2z e^z dz + [e^z z^2]_{-1}^1$$

$$= -2 \int_{-1}^1 z e^z + e - e^{-1} =$$

$$= +2 \int_{-1}^1 e^z dz - 2 [z e^z]_{-1}^1 + e - e^{-1}$$

$$= 2(e - e^{-1}) - 2[e + e^{-1}] + e - e^{-1}$$

e quindi l'integrale dato vale

$$\frac{\pi}{4} (4(e - e^{-1}) - 2(e + e^{-1})) =$$

$$= \frac{\pi}{4} (2e - 6e^{-1}) = \frac{\pi}{2} (e - 3e^{-1}).$$

Es. 2 Osserviamo che per $a = \pm 1$ abbiamo le sol. costanti $u = \pm 1$.

Concludiamo quindi per prima il caso

$a \in (-1, 1)$. In tal caso per il teo di esistenza e unicit  2: ha $u(x) \in (-1, 1)$

e quindi

$$\int_a^{u(x)} \frac{1}{j^2-1} dj = x \Leftrightarrow \int_a^{u(x)} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j+1} \right) \frac{dj}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow \left[\ln \left(\frac{|1-j|}{|1+j|} \right) \right]_a^{u(x)} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{|1-u(x)|}{|1+u(x)|} \right) = \ln \left(\frac{|1-a|}{|1+a|} \right) + 2x$$

e siccome $u(x) \in (-1,1)$ si trova

$$\frac{1-u(x)}{1+u(x)} = \left(\frac{1-a}{1+a} \right) e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 1-u(x) = \left(\frac{1-a}{1+a} \right) e^{2x} (1+u(x))$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1-a}{1+a} \right) e^{2x} = u(x) \left(1 + \frac{1-a}{1+a} e^{2x} \right)$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{(1+a) - (1-a)e^{2x}}{(1+a) + (1-a)e^{2x}}$$

e come si vede se $a \in (-1,1)$ il denominatore non si annulla mai quindi $u(x)$ è definita globalmente su \mathbb{R} .

Se $a \in (1, \infty)$ allora ragionando come sopra si ha:

$$\ln \left| \frac{1-u(x)}{1+u(x)} \right| = \ln \left(\frac{|1-a|}{|1+a|} \right) + 2x$$

e quindi, essendo $u(x) \in (1, \infty)$ per il teo. di esistenza e unicità, si ha

$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \left(\frac{a-1}{a+1} \right) e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow u(x)-1 = (u(x)+1) \left(\frac{a-1}{a+1} \right) e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow u(x) \left(1 - \frac{a-1}{a+1} e^{2x} \right) = 1 + \frac{a-1}{a+1} e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{(a+1) + (a-1) e^{2x}}{(a+1) - (a-1) e^{2x}}$$

e si vede facilmente che, essendo $a+1$ ed $(a-1)$ positivi, il denominatore si deve annullare. Quindi la sol.

non può essere definita su \mathbb{R} se

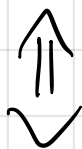
$a \in (1, \infty)$. Discorso simile si può

ripetere per $a \in (-\infty, -1]$. Infatti

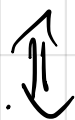
in tal caso $u(x) \in (-\infty, -1)$ e quindi

ragionando come sopra

$$\left| \frac{u(x)-1}{u(x)+1} \right| = \left| \frac{1-a}{a+1} \right| e^{2x}$$



$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \left(\frac{a-1}{a+1} \right) e^{2x}$$



$$u(x)-1 = \frac{(a-1)}{(a+1)} e^{2x} (u(x)+1)$$

$$\Leftrightarrow u(x) \left(1 - \frac{(a-1)}{(a+1)} e^{2x} \right) = \frac{a-1}{a+1} e^{2x} + 1$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{(a-1) e^{2x} + (a+1)}{(a+1) - (a-1) e^{2x}}$$

quindi il denominatore si annulla
per $a \in (-\infty, -1)$ e la sol. non è definita su \mathbb{R} .

Es. 3 Per $y \neq 0$ la funzione è
chiaramente diff. poiché si rappresenta
come combinazione di funzioni che
possono essere derivate infinite
volte, e quindi possiamo usare
il differenziale totale.

Restano i punti $(x, 0)$.

Finisce quindi $(x_0, 0)$ è facile vedere
che

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \geq 0}} f(x,y) = x_0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y < 0}} f(x,y) = x_0$$

quindi f è continua in $(x_0, 0)$.

Per la differenziabilità otteniamo
che

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{h} = \boxed{1}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h}$$

studiamo questo limite prima per
 $h \rightarrow 0^+$ e poi per $h \rightarrow 0^-$.

Abbiamo quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x_0 + \frac{1}{2} x_0^2 h - x_0}{h} = \frac{1}{2} x_0^2$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{x_0 h} - 1 - x_0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{x_0 h} - 1 - h x_0}{h^2} = \frac{1}{2} x_0^2.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \frac{1}{2}x_0^2.$$

Resta da verificare se è vero o è falso che

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

A tal fine analizziamo che basta studiare i due limiti:

$$\lim_{\substack{(h, k) \rightarrow (0, 0) \\ k \geq 0}} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

e

$$\lim_{\substack{(h, k) \rightarrow (0, 0) \\ k < 0}} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Il primo si riduce a studiare

$$\lim_{\substack{(h, k) \rightarrow (0, 0) \\ k \geq 0}} \frac{(x_0+h) + \frac{1}{2}(x_0+h)^2 k - x_0 - h - \frac{1}{2}x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k > 0}} \frac{\frac{1}{2} h^2 k + x_0 h k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \boxed{0}$$

Per l'altro limite si ha

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k < 0}} \frac{f(x_0+h, k) - f(x_0, 0) - h - \frac{1}{2} x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k < 0}} \frac{e^{(x_0+h)k} - 1 - x_0 - h - \frac{1}{2} x_0^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k < 0}} \frac{e^{(x_0+h)k} - 1 - kx_0 - kh - \frac{1}{2} x_0^2 k^2}{k \sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k < 0}} \frac{\frac{1}{2} (x_0+h)^2 k^2 + o(\|k\|^2) - \frac{1}{2} x_0^2 k^2}{k \sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k < 0}} \frac{\frac{1}{2} h^2 k^2 + x_0 h k^2 + o(\|k\|^2)}{k \sqrt{h^2 + k^2}} = \boxed{0}$$

Quindi f è diff. in $\boxed{(x_0, 0)}$.

