Analisi 2 Ingegneria Civile $30-06-2021$

Esercizio 1

Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come segue $f(x,y)=4y^2-4x^2y^2-y^4$:

- trovare tutti i punti critici di f;
- studiare la natura dei punti critici trovati (dire se si tratta di max/min locale oppure sella).

Esercizio 2

Sia data la famiglia di campi vettoriali definiti su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y)\}$ come segue:

$$\vec{F}(x,y)=(\frac{f(x)y^2}{x}+5y^2,-y\cos x+10xy)$$

al variare di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione di una variabile di classe C^1.

- Dire se esiste $f(x)$ tale che il campo vettoriale $\vec{F}$ risulti definito su $\mathbb{R}^2$ e sia conservativo su $\mathbb{R}^2$;
- se esiste una funzione $f(x)$ come nel punto precedente, calcolare il potenziale associato al corrispondente campo $\vec{F}$.

Esercizio 3

Sia dato l' insieme

$$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y,z)|-1\leq y<0,\ 0\leq z\leq 4-x^2\}.$$

Calcolare:

- $vol(\Omega)$;
- $\int\int\int_\Omega x(1-y)dxdydz$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} -8xy^2 = 0 \\ 8y - 8x^2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$
Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $y = 0$. Nel caso $x = 0$ allora dalla seconda equazione $8y - 4y^3 = 0$ da cui $y = 0, \pm\sqrt{2}$ e quindi troviamo i punti $(0,0), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2})$. Nel caso $y = 0$ invece abbiamo che la seconda equazione e' verificata per ogni x e quindi troviamo i punti $(x, 0)$.
Per studiare la natura dei punti critici scriviamo l' hessiana
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -8y^2 & -16xy \\ -16xy & 8 - 8x^2 - 12y^2 \end{bmatrix}$$
Osserviamo che calcolando l' hessiana in $(0, \pm\sqrt{2})$ troviamo la matrice diagonale
$$\begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$$
e quindi essendo la matrice definita negativa abbiamo dei max locali in $(0, \pm\sqrt{2})$.
Se calcoliamo l' hessiana nei punti $(x, 0)$ troviamo una matrice semidefinita, e quindi non possiamo usare il test dell' hessiano. Pertanto dobbiamo procedere senza il test dell' hessiana. A tal fine osserviamo che $f(x,y) = y^2(4 - 4x^2 - y^2)$ ed inoltre $f(x,0) = 0$. Quindi dobbiamo studiare il segno di f intorno ai punti $(x, 0)$. Siccome f e' scritta come prodotto di y^2 per $4 - 4x^2 - y^2$, il segno di f e' deciso da $4 - 4x^2 - y^2$. Si vede facilmente che il segno di $4 - 4x^2 - y^2$ e' positivo all'interno dell' ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ ed e' negativo all'esterno dell' ellisse $4x^2 + y^2 = 4$. Da cio' deduciamo che f sara' positiva in un intorno dei punti $(x, 0)$ per $x \in (-1, 1)$, quindi questi punti saranno di minimo locale, e sara' negativa in un intorno dei punti $(x, 0)$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, e questi punti saranno di massimo locale. Per quanto riguarda i punti $(\pm 1, 0)$ invece sono punti di sella poiche' muovendosi lungo l' asse x per $|x| < 1$ si hanno valori positivi e muovendosi lungo l' asse x per $|x| > 1$ si hanno valori negativi.

Esercizio 2

Intanto imponiamo che il campo $\vec{F}$ sia irrotazionale

$$\partial_y(\frac{f(x)y^2}{x} + 5y^2) = \partial_x(-y\cos x + 10xy)$$

che equivale a

$$2y\frac{f(x)}{x} + 10y = y\sin x + 10y.$$

Quindi il campo e' irrotazionale se e solo se

$$2\frac{f(x)}{x} = \sin x$$

e quindi $f(x) = \frac{1}{2}x\sin x$. Abbiamo quindi ottenuto il campo irrotazionale

$$(\frac{1}{2}y^2\sin x + 5y^2, -y\cos x + 10xy)$$

che risulta esser definito su $\mathbb{R}^2$ ed irrotazionale su $\mathbb{R}^2$. Essendo $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso abbiamo che il campo risulta conservativo. Come e' noto il potenziale e' definito a meno di una costante additiva, quindi ci basta calcolare il potenziale che si annulla in $(0,0)$. A tal fine calcoliamo

$$U(x_0, y_0) = \int_{\gamma_{x_0,y_0}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

dove

$$\gamma_{x_0,y_0}(t) = (tx_0, ty_0), t \in (0,1)$$

e' il segmento che congiunge l' origine con (x_0, y_0). Quindi troviamo

$$U(x_0,y_0) = \int_0^1 [(\frac{1}{2}t^2y_0^2\sin(tx_0) + 5t^2y_0^2)x_0 + (-ty_0\cos(tx_0) + 10t^2x_0y_0)y_0]dt$$

$$= \frac{1}{2}x_0y_0^2\int_0^1 t^2\sin(tx_0)dt + x_0y_0^2\frac{5}{3} - y_0^2\int_0^1 t\cos(tx_0)dt + x_0y_0^2\frac{10}{3}$$

$$= 5x_0y_0^2 + \frac{1}{2}x_0y_0^2\int_0^1 t^2\sin(tx_0)dt - y_0^2\int_0^1 t\cos(tx_0)dt$$

Osserviamo che per integrazione per parti si trova

$$U(x_0,y_0) = 5x_0y_0^2 + \frac{1}{2}x_0y_0^2(-\frac{\cos x_0}{x_0} + \frac{2\sin x_0}{x_0^2} + 2\frac{\cos x_0 - 1}{x_0^3}) - y_0^2(\frac{\sin x_0}{x_0} + \frac{\cos x_0 - 1}{x_0^2})$$

$$= 5x_0y_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2\cos x_0 + y_0^2\frac{\sin x_0}{x_0} + y_0^2\frac{\cos x_0 - 1}{x_0^2} - y_0^2\frac{\sin x_0}{x_0} - y_0^2\frac{\cos x_0 - 1}{x_0^2}$$
$$= 5x_0y_0^2 - \frac{1}{2}y_0^2\cos x_0$$

Quindi le primitive risultano essere

$$5xy^2 - \frac{1}{2}y^2\cos x + C$$

con C costante arbitraria.

Esercizio 3

Possiamo procedere per sezioni e otteniamo

$$vol(\Omega) = \int_{-1}^{0} dy(\int\int_A dxdz)$$

dove $A = \{(x,z)|0 \le z \le 4 - x^2\}$. Quindi si ha

$$vol(\Omega) = area(A) = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} dz = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Allo stesso modo si ha

$$\int\int\int_\Omega x(1-y)\, dxdydz = \int_{-1}^{0} dy \int_A x(1-y)dxdz = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} x(1-y)dz$$
$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-2}^{2} x(1-y)(4-x^2)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (1-y)dy[2x^2 - \frac{x^4}{4}]_{-2}^{2}$$
$$= (1 - [\frac{y^2}{2}]_{-1}^{0})[2x^2 - \frac{x^4}{4}]_{-2}^{2} = \frac{3}{2}[4-4] = 0.$$