Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 06 Febbraio 2020

Cognome:________________________________ ,
Nome:____________________________________

Matricola:__________________________

Esercizio 1

Sia $e^{t\Delta}$ il semigruppo del calore su $\mathbb{R}^n$. Provare che:

- per ogni $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ il seguente limite esiste ed e' finito:
$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$
- detto L_φ il limite nel punto precedente provare che $L_\varphi \in [0, \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}]$;
- $\exists \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ t. c. $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ e $\lim_{t\to\infty} \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

Esercizio 2

Per ogni $p \in [1, \infty)$ e per ogni $n \geq 1$ definiamo il seguente insieme di funzioni:

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{R}^n) = \{V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | V \text{ e' misurabile e } \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \Big[r^{2-\frac{n}{p}} (\int_{B_r(x)} |V(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \Big] < \infty\}.$$

Provare che vale la seguente inclusione

$$V \in L^{\frac{n}{2}}_{deb}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow V \in \mathcal{F}_{\frac{n}{2}-\mu}(\mathbb{R}^n), \quad \forall 0 < \mu \leq \frac{n}{2} - 1.$$

1. Soluzioni

Esercizio 1
Scriviamo $f = f_+ - f_-$ dove f_+ ed f_- sono la parte positiva e negativa di f. Allora
$$e^{t\Delta} f = e^{t\Delta} f_+ - e^{t\Delta} f_-$$
e quindi
$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^1} \leq \|e^{t\Delta} f_+\|_{L^1} + \|e^{t\Delta} f_-\|_{L^1} = \|f_+\|_{L^1} + \|f_-\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$$
dove abbiamo usato il fatto che se $f \geq 0$ allora $\|e^{t\Delta} f\|_{L^1} = \|K_t \star f\|_{L^1} = \int K_t \star f = \int f = \|f\|_{l^1}$, dove abbiamo tenuto conto della positivita' di $K_t(x)$. Osserviamo ora che $e^{(t+s)\Delta} f = e^{t\Delta}(e^{s\Delta} f)$ e quindi per quanto provato sopra si ha
$$\|e^{(t+s)\Delta} f\|_{L^1} \leq \|e^{s\Delta} f\|_{L^1}$$
e quindi e' decrescente la funzione $t \to \|e^{t\Delta} f\|_{L^1}$ e quindi esiste il limite.

Inoltre per monotonia si ha che $\|e^{t\Delta} f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ e quindi il limite sara' positivo e minore oppure uguale a $\|f\|_{L^1}$.

Infine osserviamo che per quanto detto sopra se $f \geq 0$ allora $\|e^{t\Delta} f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ e quindi anche il limite per $t \to \infty$ sara' uguale a $\|f\|_{L^1}$.

Esercizio 2
Nel seguito indicheremo con c, c', c'' etc delel costanti positive il cui valore puo' cambiare da riga in riga.

Osserviamo che
$$\int_{B_x(r)} |V|^{\frac{n}{2}-\mu} = c \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-\mu-1} |\{|V| > \lambda\} \cap B_x(r)| d\lambda$$
$$\leq c' \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-\mu-1} \min\{|B_x(r)|, |\{|V| > \lambda\}| d\lambda \leq c'' \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-\mu-1} \min\{r^n, \lambda^{-\frac{n}{2}}\} d\lambda$$
$$= c'' \int_{\frac{1}{r^2}}^\infty \lambda^{-\mu-1} + c'' \int_0^{\frac{1}{r^2}} r^n \lambda^{\frac{n}{2}-\mu-1} = c'' r^{2\mu} + c'' r^{n-n+2\mu}$$
Quindi
$$r^{2-\frac{n}{\frac{n}{2}-\mu}} \|V\|_{L^{\frac{n}{2}-\mu}(B_x(r))} = c''' r^{2-\frac{n}{\frac{n}{2}-\mu}} r^{2\mu(\frac{1}{\frac{n}{2}-\mu})} < c''''$$