Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 14 Giugno 2018

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $u \in C^2(\Omega)$. Provare le seguenti implicazioni:

1.
$$\Delta u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \Longrightarrow$$
$$\frac{\int_{B_r(x)} u(y)dy}{vol(B_r(x))} \leq u(x), \quad \forall 0 < r < dist(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega$$

2.
$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \Longrightarrow$$
$$\frac{\int_{B_r(x)} |\nabla u(y)|^2 dy}{vol(B_r(x))} \geq |\nabla u(x)|^2, \quad \forall 0 < r < dist(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega.$$

Esercizio 2
Provare che esiste una costante $C > 0$ per cui vale la seguente stima per la funzione massimale di Hardy-Littlewood $\mathcal{M}f$:

$$\lambda \mathcal{L}\{\mathcal{M}f(x) > \lambda\} \leq C \int_{\{|f(y)| \geq \frac{\lambda}{2}\}} |f(y)|dy, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{L}$ indica la misura di Lebesgue.

1 Soluzioni

Esercizio 1

Abbiamo

$$0 \geq \int_{B_r(x_0)} \Delta u dx = \int_{S_r(x_0)} \partial_\nu u(x) d\sigma_{n-1} = \int_{S_r(x_0)} \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u(x) d\sigma_{n-1}$$

$$= \int_{S_1(0)} x \cdot \nabla u(rx + x_0) r^{n-1} d\sigma_{n-1}$$

da cui

$$0 \geq \int_{S_1(0)} x \cdot \nabla u(rx + x_0) d\sigma_{n-1} = \frac{d}{dr} \int_{S_1(0)} u(rx + x_0) d\sigma_{n-1}$$

$$= \frac{d}{dr}(r^{-n+1} \int_{S_r(0)} u(x + x_0) d\sigma_{n-1}) = \frac{d}{dr}(r^{-n+1} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma_{n-1})$$

quindi $\frac{\int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma_{n-1}}{|S_r(x_0)|}$ e' una funzione decrescente in r che tende a $u(x_0)$ per $r \to 0^+$. Osserviamo ora che

$$\int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \int_0^r \int_{S_s(x_0)} u(x) d\sigma_{n-1} ds \leq \int_0^r u(x_0)|S_s(x_0)| ds$$

$$= u(x_0)|S_1(x_0)| \int_0^r s^{n-1} ds = u(x_0) \frac{r^n}{n} |S_1(x_0)|.$$

Si conclude osservando che $\frac{r^n}{n}|S_1(x_0)| = vol(B_r(x_0))$.
Il secondo punto segue dal primo se mostriamo che $\Delta|\nabla u|^2 \geq 0$. Osserviamo che

$$\partial_{x_i} |\nabla u|^2 = 2 \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_i x_j} u \partial_{x_j} u$$

e quindi

$$\partial^2_{x_i} |\nabla u|^2 = 2 \sum_{j=1}^n \partial^3_{x_i x_i x_j} u \partial_{x_j} u + 2 \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_i x_j} u \partial^2_{x_i x_j} u$$

da cui

$$\Delta |\nabla u|^2 = 2 \sum_{i,j=1}^n \partial^3_{x_i x_i x_j} u \partial_{x_j} u + 2 \sum_{i,j=1}^n \partial^2_{x_i x_j} u \partial^2_{x_i x_j} u$$

$$= 2\sum_j \partial_{x_j}\Delta u \partial_{x_j} u + 2\sum_{i,j=1}^n (\partial^2_{x_i x_j} u)^2$$

e quindi tenuto conto che $\Delta u = 0$ deduciamo

$$\Delta |\nabla u|^2 \geq 0$$

Esercizio 2

Introduciamo $f_{<\frac{\lambda}{2}} = |f|\chi_{|f|<\frac{\lambda}{2}}$ e $f_{\geq\frac{\lambda}{2}} = |f|\chi_{|f|\geq\frac{\lambda}{2}}$. Osserviamo che $\mathcal{M}f(x) \leq \mathcal{M}f_{<\frac{\lambda}{2}}(x) + \mathcal{M}f_{\geq\frac{\lambda}{2}}(x)$. E quindi

$$\mathcal{L}\{\mathcal{M}f(x) > \lambda\} \leq \mathcal{L}\{\mathcal{M}f_{<\frac{\lambda}{2}} > \frac{\lambda}{2}\} + \mathcal{L}\{\mathcal{M}f_{\geq\frac{\lambda}{2}}(x) > \frac{\lambda}{2}\}$$

Osserviamo che $\{\mathcal{M}f_{<\frac{\lambda}{2}} > \frac{\lambda}{2}\} = \emptyset$ poiche' $f_{<\frac{\lambda}{2}}(x) < \frac{\lambda}{2}$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ e quindi

$$\mathcal{L}\{\mathcal{M}f(x) > \lambda\} \leq \mathcal{L}\{\mathcal{M}f_{\geq\frac{\lambda}{2}}(x) > \frac{\lambda}{2}\} \leq C\frac{\|f_{\geq\frac{\lambda}{2}}\|_{L^1}}{\lambda} = \frac{C}{\lambda}\int_{|f|\geq\frac{\lambda}{2}} |f| dx$$

dove abbiamo usato la stima di hardy-Littlewood applicata alla funzione $f_{\geq\frac{\lambda}{2}}$.