Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2019/2020)

Prova scritta del 15 Giugno 2020

Cognome:________________________________ ,
Nome:__________________________________

Matricola:__________________________

Esercizio 1

Sia data una funzione $u \in C^2(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto ed $n \geq 3$, tale che

$$\Delta u = f.$$

Provare che vale la seguente identita' per ogni $x \in \Omega$ ed $r > 0$ tale che $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$:

$$u(x) = \fint_{S_r(x)} u\, d\sigma + \frac{1}{\omega_{n-1}(n-2)} \int_{B_r(x)} \Big(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|y-x|^{n-2}}\Big) f(y)dy$$

dove ω_{n-1} indica la misura $(n-1)$-dimensionale della sfera unitaria $\{x \in \mathbb{R}^n \| \|x\| = 1\}$.

Esercizio 2

Sia $u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = 0 \\ u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0 \end{cases}$$

dove $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e' tale che $V(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Provare che necessariamente $u(t,x) = 0$ per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Soluzioni

Esercizio 1

A meno di traslazione basta provare l' identita' per $x = 0$ assumendo che $\overline{B}_r(0) \subset \Omega$. Quindi mostreremo che

$$u(0) = \fint_{S_r(0)} u\, d\sigma + \frac{1}{\omega_{n-1}(n-2)} \int_{B_r(0)} \Big(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) f(y)dy.$$

Osserviamo che per il teorema della divergenza e sfruttando la relazione $\Delta u = f$ si ha

$$\int_{B_r(0)} f(y)dy = \int_{S_r(0)} \nabla u \cdot \nu\, d\sigma = \int_{S_1(0)} \nabla u[r\omega] \cdot \omega r^{n-1} d\sigma$$

$$= \int_{S_1(0)} \frac{d}{dr}(u(r\omega))r^{n-1} d\sigma = \frac{d}{dr} \int_{S_1(0)} u(r\omega) r^{n-1} d\sigma - (n-1) \int_{S_1(0)} u(r\omega) r^{n-2} d\sigma$$

e quindi

$$\frac{d}{dr} \int_{S_r(0)} u\, d\sigma - \frac{n-1}{r} \int_{S_r(0)} u\, d\sigma = \int_{B_r(0)} f(y)dy.$$

Pertanto abbiamo la seguente ODE:

$$g' - \frac{n-1}{r} g = H$$

dove $g(r) = \int_{S_r(0)} u\, d\sigma$ e $H(r) = \int_{B_r(0)} f(y)dy$. Per integrazione deduciamo che

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{r^{n-1}} g(r)\Big) = \frac{H(r)}{r^{n-1}}$$

da cui

$$\frac{1}{r^{n-1}} g(r) - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} g(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{H(s)}{s^{n-1}} ds, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Osserviamo quindi che ritornando alla definizione di $g(r)$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0$ troviamo

$$\fint_{S_r(0)} u\, d\sigma - u(0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{H(s)}{s^{n-1}} ds.$$

Quindi resta solo da provare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{H(s)}{s^{n-1}} ds = \frac{1}{2-n} \int_{B_r(0)} \Big(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) f(y)dy.$$

Lavoriamo quindi integrando per parti e troviamo

$$\int_\varepsilon^r \frac{H(s)}{s^{n-1}}ds = \frac{1}{2-n}\int_\varepsilon^r \frac{d}{ds}(s^{-n+2})H(s)ds$$

$$= \frac{1}{2-n}[s^{-n+2}H(s)]_{s=\varepsilon}^{s=r} + \frac{1}{n-2}\int_\varepsilon^r s^{-n+2}H'(s)ds$$

$$= \frac{1}{2-n}r^{-n+2}H(r) + \frac{1}{n-2}\varepsilon^{-n+2}H(\varepsilon) + \frac{1}{n-2}\int_\varepsilon^r s^{-n+2}(\int_{S_s(0)} f\, d\sigma)ds.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si trova

$$\frac{1}{2-n}r^{-n+2}\int_{B_r(0)} f(y)dy + \frac{1}{n-2}\int_{B_r(0)} |y|^{-n+2}f(y)dy.$$

Esercizio 2

Usando la posivita' di $V(x)$ e mimando la dimostrazione della velocita' finita di propagazione per soluzioni dell' equazione delle onde si trova:

$$\int_{B(0,R-t)} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx \leq \int_{B(0,R)} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx.$$

La conclusione segue facilmente.