Esercizi sulla Differenziabilità di Funzioni di 2 o più Variabili

Esercizio Calcolare il gradiente in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = xye^{\sqrt{|x+y|}}$$

Provare che la funzione e' differenziabile nella regione $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \neq 0\}$. Dire se e' differenziabile in $(0,0)$ ed in $(1,-1)$.

[E' diff. in $(0,0)$, non e'diff. in $(1,-1)$]

Esercizio Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dire la funzione e' continua su $\mathbb{R}^2$. Dire inoltre in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione risulta differenziabile.

[Cont. su $\mathbb{R}^2$, differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$]

Esercizio Calcolare il gradiente ∇f della funzione:

$$\exp^{arctg(x^2-y^2)}$$

Calcolare inoltre la derivata direzionale $D_{\vec{v}}f(1,1)$ dove $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

[$\nabla f = (\frac{2x}{1+(x^2-y^2)^2} \exp^{arctg(x^2-y^2)}, \frac{-2y}{1+(x^2-y^2)^2} \exp^{arctg(x^2-y^2)}), D_{\vec{v}}f(1,1) = 0$]

Esercizio Provare che la funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \ln(2+x^2)$$

e' differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$. Calcolare inoltre il piano tangente nel punto $(1,0,0)$.

[R. $w - (2e\ln 3 + \frac{2e}{3})x + 2e\ln 3 + \frac{2e}{3} = 0$]

Esercizio Provare che la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$$

e' differenziabile in tutti i punti del suo dominio. Calcolare inoltre $D_{\vec{v}}f(0,0,\frac{1}{2})$ dove $\vec{v} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

[$D_{\vec{v}}f(0,0,\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{54}}$]