**Analisi 2 Ingegneria Civile** $13 - 06 - 2022$

**Esercizio 1** Dire se esistono, giustificando la risposta, $\max_K f(x,y), \min_K f(x,y)$ dove

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$K = \{(x,y)|x^4 + y^4 \leq 27, x \geq 0, y \geq 0\}$$

In caso affermativo calcolare $\max_K f(x,y), \min_K f(x,y)$.

**Esercizio 2**

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x + 2y, z, y)$ lungo la superficie $\Sigma = \{(x,y,z)|x^2 + 2y + z^2 = 1, y \geq 0\}$ secondo la normale che vale $(0,-1,0)$ nel punto $(0, \frac{1}{2}, 0)$.

**Esercizio 3** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 1 + t^2 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

# SOLUZIONI

## Esercizio 1

I valori di max e di min sono raggiunti essendo $f$ continua e $K$ chiuso e limitato. Per la limitatezza basta osservare che abbiamo $(x,y) \in K$ implica $|x|, |y| \leq (27)^{\frac{1}{4}}$. La chiusura deriva dal fatto che nella definizione di $K$ sono coinvolti $\leq, \geq$ e quindi $K$ contiene tutti i sui punti di accumulazione. Osserviamo che il bordo di $K$ e' composto da tre pezzi: $L_1, L_2, L_3$ dove $L_1$ e' il segmento congiungente $(0,0)$ con $(0,1)$, $L_2$ e' il segmento congiungente $(0,0)$ con $(1,0)$ ed

$$L_3 = \{(x,y) | x^4 + y^4 = 27, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Per il calcolo esplicito di max e min prima osserviamo che i punti su cui si annulla $\nabla f$ sono i punti del tipo $(0,y)$ che appartengono ad $L_1$ e quindi sono inclusi nel bordo. Per lo studio sul bordo osserviamo che $f = 0$ su $L_1 \cup L_2$. Quindi l'unico valore di confronto da memorizzare e' il valore 0. Su $L_3$ invece usiamo i moltiplicatori di Lagrange (osserviamo che i punti di taglio qui sono tutti inclusi in $L_1, L_2$ che abbiamo gia' analizzato e che quindi da ora in poi non saranno piu' considerati). Impostiamo ora il primo sistema di Lagrange su $L_3$:

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 27 \end{cases}$$

che non ha soluzioni $(0,0)$. Passiamo quindi al secondo sistema:

$$\begin{cases} 2xy = 4\lambda x^3 \\ x^2 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 27 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che nella prima equazione se $x = 0$ allora ritorniamo in $L_1$, altrimenti possiamo dividere per $x$ e troviamo dalle prime due equazioni

$$y = 2\lambda x^2, x^2 = 4\lambda y^3$$

che implica $y = 8\lambda^2 y^3$. Quindi se $y = 0$ ritorniamo in $L_2$ che e' gia' stato analizzato e pertanto possiamo dividere per $y$ trovando $1 = 8\lambda^2 y^2$. Ma allora

$\lambda \neq 0$ e quindi da $y = 2\lambda x^2$ ricaviamo $x^2 = \frac{y}{2\lambda}$. E quindi dalle relazioni $x^2 = \frac{y}{2\lambda}$ e $1 = 8\lambda^2 y^2$ deduciamo

$$27 = x^4 + y^4 = \frac{y^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{64\lambda^4} = \frac{1}{32\lambda^4} + \frac{1}{64\lambda^4}$$

da cui $\lambda^4 = \frac{3}{27\times 64}$ ossia $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Ma osserviamo che siccome $y \geq 0$, dalla relazione $y = 2\lambda x^2$ deduciamo $\lambda \geq 0$ e quindi $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Ma allora con questo valore di $\lambda$ deduciamo dalle precedenti relazioni:

$$x^2 = \sqrt{6}y$$

che con la relazione $x^4 + y^4 = 27$ implica

$$y^4 + 6y^2 - 27 = 0$$

ossia $y = \pm\sqrt{3}$, ma essendo $y \geq 0$ si ha $y = \sqrt{3}$. E quindi dalla relazione $x^2 = \sqrt{6}y$ troviamo $x^2 = 3\sqrt{2}$. Dovendo essere $x \geq 0$ abbiamo $x = \sqrt{3} \times 2^{\frac{1}{4}}$. Quindi il punto di minimo sara' $(0, 0)$ dove $f$ vale 0 e il punto di massimo sara' $(\sqrt{3} \times 2^{\frac{1}{4}}, \sqrt{3})$ dove $f$ vale $3\sqrt{6}$.
In modo alternativo, e facendo meno conti, si poteva parametrizzare $L_3$ come segue

$$(0, \frac{\pi}{2}) \ni \theta \to (27)^{\frac{1}{4}}(\sqrt{\cos\theta}, \sqrt{\sin\theta})$$

ed andare avanti con questa parametrizzazione.....

**Esercizio 2** La superficie e' cartesiama rispetto alla variabile $y$, ossia e' grafico della funzione

$$\{x^2 + z^2 \leq 1\} \ni (x, z) \to \frac{1 - x^2 - z^2}{2}$$

che rappresenta un tronco di paraboloide sdraiato lungo l' asse $y$. Possiamo quindi procedere usando la parametrizzazione classica per superfici cartesiane oppure possiamo chiudere $\Sigma$ con il coperchio

$$C = \{(x, 0, z) | x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Allora si vede facilmente che se consideriamo $\Omega$ la zona compresa tra $\Sigma$ e $C$ si ha che la normale esterna nel punto $(0, \frac{1}{2}, 0)$ e' opposta a quella indicata nel testo. Quindi usando il teorema della divergenza abbiamo

$$\int\int\int_\Omega div\vec{F} dxdyz = Flusso(\vec{F}, \Sigma, \nu_{ext}) = Flusso(\vec{F}, C, \nu_{ext}) - Flusso(\vec{F}, \Sigma, \nu)$$

dove $\nu$ indica la normale del testo su $\Sigma$. Dalla relazione precendete troviamo

$$Flusso(\vec{F}, \Sigma, \nu) = Flusso(\vec{F}, C, \nu_{ext}) - \int\int\int_{\Omega} div\vec{F}dxdyz$$

$$= Flusso(\vec{F}, C, \nu_{ext}) - vol(\Omega)$$

D'altra parte sappiamo che $\nu_{ext}$ su $C$ vale $(0, -1, 0)$ e quindi

$$Flusso(\vec{F}, C, \nu_{ext}) = -\int\int_{x^2+z^2\leq 1} zdxdz = 0$$

ed inoltre integrando per fili rispetto alla variabile $y$ si trova:

$$vol(\Omega) = \int\int_{x^2+z^2\leq 1} \frac{1-x^2-z^2}{2}dxdz = 2\pi\int_0^1 \frac{1-\rho^2}{2}\rho d\rho = \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{6}.$$

Quindi il flusso cercato vale $-\frac{\pi}{6}$.

**Esercizio 3** Risolviamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda = -1, 2$. Quindi la soluzione generale dell' equazione omogenea e'

$$Ae^{2t} + Be^{-t}.$$

Troviamo ora una soluzione particolare della non-omogenea con la variazione delle costanti:

$$z = A(t)e^{2t} + B(t)e^{-t}$$

quindi $z' = e^{2t}A' + 2Ae^{2t} + B'e^{-t} - B(t)e^{-t}$ e quindi ponendo

$$e^{2t}A' + B'e^{-t} = 0$$

abbiamo $z' = 2Ae^{2t} - B(t)e^{-t}$ da cui

$$z'' = 2A'e^{2t} + 4Ae^{2t} - B'e^{-t} + Be^{-t}.$$

Quindi imponendo che $z$ risolva 'equazione non omogenea troviamo

$$2A'e^{2t} + 4Ae^{2t} - B'e^{-t} + Be^{-t} - 2Ae^{2t} + Be^{-t} - 2Ae^{2t} - 2Be^{-t} = 1 + t^2$$

che equivale a

$$2A'e^{2t} - B'e^{-t} = 1 + t^2.$$

Ma allora $A, B$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} e^{2t}A' + B'e^{-t} = 0 \\ 2A'e^{2t} - B'e^{-t} = 1 + t^2 \end{cases}$$

da cui

$$-3B'e^{-t} = 1 + t^2$$

e quindi

$$B = -\int \frac{e^t(1+t^2)}{3} = -e^t - \frac{1}{3}e^t t^2 + \frac{2}{3}te^t + C$$

e quindi scegliendo $C = 0$ abbiamo $B(t) = -e^t - \frac{1}{3}e^t t^2 + \frac{2}{3}te^t$. Per ricavare $A(t)$ abbiamo sempre dal sistema

$$e^{2t}A' = \frac{1+t^2}{3}$$

da cui

$$A = \frac{1}{3}\int e^{-2t}(1+t^2) = -\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-2t}t^2 - \frac{1}{6}e^{-2t}t + C$$

e quindi per $C = 0$

$$A(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-2t}t^2 - \frac{1}{6}e^{-2t}t.$$

La soluzione generale dell' equazione completa sara'

$$Ae^{2t} + Be^{-t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t - 1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t = Ae^{2t} + Be^{-t} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

Quindi imponendo le condizioni di Cauchy abbiamo:

$$\begin{cases} A + B - \frac{5}{4} = 2 \\ 2A - B + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

ossia $A = \frac{11}{12}, B = \frac{7}{3}$. Pertanto la soluzione cercata sara'

$$\frac{11}{12}e^{2t} + \frac{7}{3}e^{-t} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

Nel caso specifico si poteva anche cercare direttamente la soluzione particolare del tipo polinomio di grado 2, tuttavia il metodo di variazione delle costanti arbitrarie e' piu' generale e permette di trovare la soluzione particolare anche in situazioni piu' complicate.