PARTE A

1. Il seguente integrale $\int\int\int_{\Omega} x^2 dxdydz$, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) | \max\{|x|,|y|,|z|\} < 1\},$$

vale:

A: N.A. B: 8/3 C: 7/3 D: 4/3 E: 5/3

2. L' integrale seguente

$$\int\int_A e^{x^2} e^{y^2} dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y > x\}$$

vale:

A: $\pi(e-1)$ B: $4\pi(e-1)$ C: N.A. D: $2\pi(e-1)$ E: $\frac{\pi}{2}(e-1)$

3. Il seguente integrale di prima specie $\int_\gamma x ds$, dove γ e' la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, vale

A: -1 B: 1 C: 0 D: 2 E: N.A.

4. Il flusso del campo (x,y,z) lungo il bordo di Ω orientato lungo la normale esterna, dove $\Omega = \{(x,y,z) | x > 0, y > 0, x + y < 1, z \in (0,1)\}$, vale

A: 1 B: 3/2 C: N.A. D: 3 E: 5/2

5. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(2xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vale:

A: $\frac{1}{2}$ B: $N.E.$ C: 0 D: N.A. E: -1

6. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |x^2 + \sin y|$ nel punto $(0,0)$ vale

A: $(0,1)$ B: $(1,0)$ C: N.E. D: N.A. E: $(0,0)$

7. Consideriamo $f(x,y) = e^{|x||y|}$. Allora il gradiente di f nel punto $(0,0)$ vale:

A: $(0,0)$ B: N.E. C: N.A. D: $(0,1)$ E: $(1,0)$

8. Il volume di Ω, dove $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$, vale:

A: $\frac{\pi}{6}$

B: π C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\pi}{8}$ E: N.A.

9. Sia data la funzione $f(x,y) = arctg(xy^2)$. Allora il punto $(0,0)$ e'

A: min locale B: max locale C: min assoluto D: N.A. E: punto di sella

10. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin(x^2+y^2)}$ vale

A: N.A. B: 3 C: N.E. D: 2 E: 1

CODICE=890952

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

16 Gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=890952

SCRITTO ANALISI II ING. BIOMEDICA DEL 16-01-2017

<u>Es. 1</u> Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{arctg} z \, dx\, dy\, dz$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2<1,\ (x-1)^2+y^2<1,\ 0<z<1\}$.

<u>Es. 2</u> Calcolare $\max_A f(x,y)$ e $\min_A f(x,y)$

dove $f(x,y) = x \ln x + y \ln y$

e $A = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ y+x \leq 1\}$

<u>Es. 3</u> Sia data la curva

$\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen}^2 t)$.

Calcolare l'area della regione Ω racchiusa tra la curva γ, l'asse delle x e l'asse delle y.

SOLUZIONI

Es. 1 Integriamo per fili. Sia quindi

$$A = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ (x-1)^2+y^2<1\}$$

allora

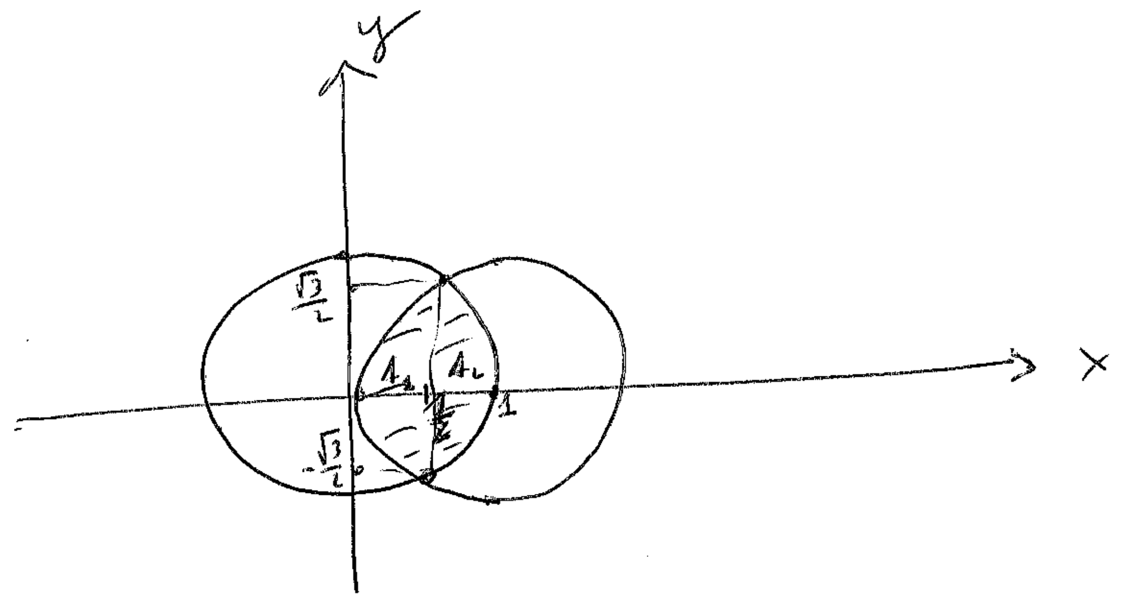
$$\iiint_\Omega \operatorname{arctg} z \,dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \int_0^1 \operatorname{arctg} z \,dz =$$

$$= \iint_A dx\,dy \left(\left[z \operatorname{arctg} z \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{z\,dz}{1+z^2} \right) =$$

$$= \iint_A (\operatorname{arctg} 1)\,dx\,dy - \frac{1}{2} \iint_A \left[\ln(1+z^2) \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2) \right] \iint_A dx\,dy .$$

Calcoliamo ora $\iint_A dx\,dy$ e osserviamo che $A = A_1 \cup A_2$ dove A_2 e A_1 sono rappresentati nella figura seguente:



quindi per simmetria

$$\iint_A dx\,dy = 2\iint_{A_2} dx\,dy = 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx$$

$$= 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}\right) dy = 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2}\, dy - \sqrt{3} =$$

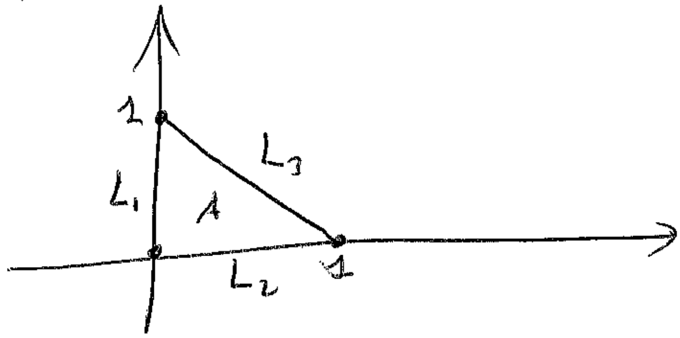
$y = \operatorname{sen} t$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t \, \cancel{\cos t}\, dt = 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\cdot 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Es. 2 L'insieme A è rappresentato in figura:



e la frontiera è composta dai segmenti L_1, L_2, L_3.

Cerchiamo candidati punti di Max e Min all'interno di A, quindi poniamo:

$$\nabla f = (0,0) \iff 1+\ln x = 0, \; 1+\ln y = 0$$

$$\iff x = \frac{1}{e}, \; y = \frac{1}{e}$$

quindi $f\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) = 2\,\frac{1}{e}\left(\ln \frac{1}{e}\right) = \boxed{-\frac{2}{e}}$.

Lavoriamo ora sul bordo $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Su L_1 usiamo la parametrizzazione

$[0,1] \ni t \xrightarrow{\gamma} (0,t)$ e quindi

$f \circ \gamma(t) = t \ln t$ e siamo ricondotti a

studiare

$\underset{t\in[0,1]}{\text{Min}} (t \ln t)$ e $\underset{t\in[0,1]}{\text{Max}} (t \ln t)$.

Siccome $(t \ln t)_{\substack{(t=1)\\ t=0}} = 0$ e siccome $t \ln t \leq 0$ $\forall t \in [0,1]$

abbiamo che $\underset{[0,1]}{\text{Max}} (t \ln t) = 0$.

Invece per trovare il Min studiamo

$(t \ln t)' = \ln t + 1$ e quindi il punto di

Min sarà l'unico punto in cui si annulla

la derivata ossia $t = \frac{1}{e}$.

Pertanto $\underset{[0,1]}{\text{Max}} (t \ln t) = \boxed{0}$ e $\underset{[0,1]}{\text{Min}} (t \ln t) = \boxed{-\frac{1}{e}}$

Su L_2 abbiamo per simmetria gli stessi Max e Min che abbiamo su L_1.

Resta da studiare

$$\max_{L_3} f \quad e \quad \min_{L_3} f.$$

Qui useremo i moltiplicatori di Lagrange (che funzionano su $L_3 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ visto che $(0,1)$ e $(1,0)$ sono punti di taglio che però abbiamo già incluso nello studio di L_1 ed L_2).

Per i moltiplicatori siamo ridotti al sistema:

$$\begin{cases} (x \ln x)' = \lambda \\ (y \ln y)' = \lambda \\ x + y = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + \ln x) = \lambda \\ (1 + \ln y) = \lambda \\ x + y = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \iff \begin{array}{c} 1 + \ln x = 1 + \ln y \\ \Downarrow \\ x = y \\ \text{e quindi} \\ \boxed{x = y = \frac{1}{2}} \end{array}$$

Pertanto dobbiamo anche tener conto del valore

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\ln 2}\ .$$

Per calcolare $\max_A$ e $\min_A$ siamo quindi

ricondotti al confronto tra

$$\left\{-\frac{1}{e}, -\ln 2, -\frac{2}{e}, 0\right\}.$$

È facile quindi dedurre che

$$\max_A f = 0 \qquad e \qquad \min_A f = \min\left\{-\ln 2, -\frac{2}{e}\right\}$$

$$= \boxed{-\frac{2}{e}}$$

dove abbiamo usato il fatto che

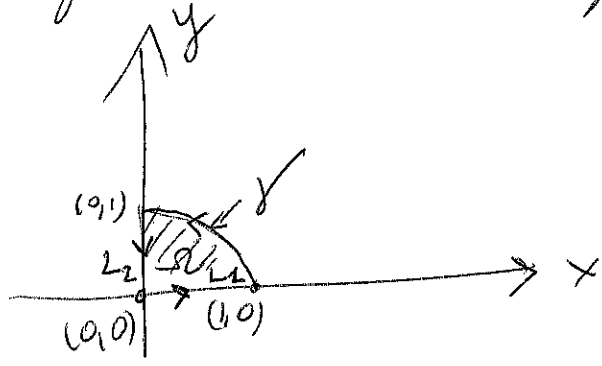
$$\ln 2 < \frac{2}{e} \iff 2^{\frac{e}{2}} < e \iff 2^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{e}}$$

e quindi basta osservare che la funzione

$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ è monotona crescente per $x \in [0, e]$

infatti basta studiare il segno di $f'(x)$.

Es 3 Si tratta di trovare l'area della regione Ω rappresentata sotto:



Usando la formula di Gauss-Green basta calcolare

$$\boxed{\int_\Gamma x\,dy}$$

dove Γ è la curva composta da γ, L_1, L_2 con L_1 ed L_2 segmenti $\overline{(0,0),(1,0)}$ e $\overline{(0,0),(0,1)}$ percorsi in senso antiorario.

Osserviamo che $\int_{L_1} x\,dy = 0$ e $\int_{L^2} x\,dy = 0$.

Quindi resta

$$\int_\Gamma x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,t\,(\cos^2 t)\,dt$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$