Secondo compitino di Analisi 2
per Ingegneria Civile $28 - 04 - 2022$

Esercizio 1 Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ definito su $\mathbb{R}^2$. Dire se il campo e' conservativo e in caso affermativo descrivere l' insieme di tutte le sue primitive.

Esercizio 2 Calcolare il volume dei solidi di rotazione Ω_1 e Ω_2 ottenuti ruotando rispettivamente intorno all' asse z e intorno all' asse y gli insiemi:

$$A_1 = \{(y, z)|1 < yz < 2, 1 < y < 2\}, A_2 = \{(y, z)|1 < yz < 2, z < y < 2z\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_B |x - y| dxdydz$$

dove

$$B = \{(x, y, z,)|x^2 + y^2 + z^2 < 4, x + y > 0\}$$

Soluzioni

Esercizio 1 Abbiamo che

$$\partial_y(x^2+y^2) = \partial_x(2xy)$$

inoltre il campo e' definito su $\mathbb{R}^2$ che e' convesso quindi il campo e' conservativo. Le primitive sono definite a meno di una costante additiva. Calcoliamo la primitiva che si annulla in $(0,0)$ nel punto (x_0, y_0). Quindi integriamo sul segmento congiungente $(0,0)$ con (x_0, y_0):

$$f(x_0,y_0) = \int_0^1 (t^2(x_0^2+y_0^2)x_0+2t^2x_0y_0y_0)dt = \frac{1}{3}(x_0^2+y_0^2)x_0+\frac{2}{3}x_0y_0^2 = \frac{1}{3}x_0^3+x_0y_0^2$$

quindi le primitive del campo sono

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C.$$

Esercizio 2 Usiamo Guldino e quindi $vol(\Omega_1) = 2\pi \int\int_{A_1} ydydz$, $vol(\Omega_2) = 2\pi \int\int_{A_2} zdydz$. Calcoliamo quindi questi integrali doppi. Per il primo abbiamo

$$\int\int_{A_1} ydydz = \int_1^2 (\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{2}{y}} ydz)dy = \int_1^2 1dy = 1$$

e quindi $vol(\Omega_1) = 2\pi$.
Per il secondo invece procediamo con un cambio di variabili. Poniamo quindi $yz = u$, $\frac{y}{z} = v$ e abbiamo che il nuovo dominio d' integrazione in u, v diventa $\tilde{A}_2 = \{(u,v)|1 < u < 2, 1 < v < 2\}$. Calcoliamo ora lo Jacobiano del cambio di variabile che si puo' scrivere come segue: $y = \sqrt{uv}$, $z = \sqrt{\frac{u}{v}}$. Quindi scrivendo la matrice Jacobiana e calcolando il determinante troviamo $\frac{1}{2v}$. Inoltre la funzione da integrare (ossia la funzione z) nelle variabili (u,v) si scrive come $\sqrt{\frac{u}{v}}$ e quindi l' integrale doppio da calcolare diventa

$$\int\int_{A_2} zdydz = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{v^{\frac{3}{2}}}dudv$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (2^{\frac{3}{2}} - 1) \times (-2) \times (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$$

e quindi $vol(\Omega_2) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$.

Esercizio 3 La funzione $|x-y|$ nella zona $A_1 = \{(x,y,z)|x > y\}$ e' uguale ad $x-y$, mentre e' uguale a $-x+y$ nella zona $A_2 = \{(x,y,z)|x < y\}$. Quindi dobbiamo calcolare

$$\int\int\int_{B\cap A_1}(x-y)dxdydz + \int\int\int_{B\cap A_2}(y-x)dxdydz$$

Usando le sferiche e' facile vedere che

$$B\cap A_1 = \{(\rho,\theta,\varphi)|\rho\in(0,2), \varphi\in(0,\pi), \theta\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\}$$

$$B\cap A_2 = \{(\rho,\theta,\varphi)|\rho\in(0,2), \varphi\in(0,\pi), \theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)\}$$

Quindi abbiamo

$$\int\int\int_{B\cap A_1}(x-y)dxdydz + \int\int\int_{B\cap A_2}(y-x)dxdydz$$

$$= \int_0^2\int_0^\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\rho\sin\varphi(\cos\theta-\sin\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$+\int_0^2\int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\rho\sin\varphi(\sin\theta-\cos\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$= 4\int_0^\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\varphi(\cos\theta-\sin\theta)d\theta d\varphi$$

$$+4\int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2\varphi(\sin\theta-\cos\theta)d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta + 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$= 2\pi[\sin\theta+\cos\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - 2\pi[\sin\theta+\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 4\pi\sqrt{2}$$