Analisi 3 - Corso di Laurea in Fisica (A.A. 2016/2017)

Prova scritta del 02 Febbraio 2017

257891260466124

Cognome:______________________________________
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1 Siano $f(x,y,z) = xyz\ln(x^2y^2z^2)$ ed

$$A = \{(x,y,z)|x+y+z \le 1, x>0, y>0, z>0\}:$$

- provare che esiste una unica funzione continua $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ dove

$$\overline{A} = \{(x,y,z)|x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$$

  e tale che $\overline{f}(x,y,z) = f(x,y,z)$ per $(x,y,z) \in A$;

- calcolare $\max_{\overline{A}} \overline{f}$ e $\min_{\overline{A}} \overline{f}$.

Esercizio 2
Per ogni $r > 0$ introduciamo l'insieme

$$\Omega_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \le 1, (x-1)^2+y^2+z^2 \le r^2\}:$$

- calcolare al variare di $r > 0$ il volume di Ω_r;

- calcolare

$$\lim_{r\to\infty} \int\int\int_{\Omega_r} |arctg(z)| dxdydz.$$

Esercizio 3

Sia data la matrice
$$\begin{pmatrix} a(x,y) & c(x,y) \\ c(x,y) & b(x,y) \end{pmatrix}$$
con $a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^2)$:

- provare la seguente equivalenza (dove Hess indica la matrice Hessiana):
$$\exists f \in C^3 \text{ tale che } \text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & c(x,y) \\ c(x,y) & b(x,y) \end{pmatrix} \iff c_x = a_y \text{ e } c_y = b_x;$$

- siano assegnate le funzioni,
$$a(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2},$$
$$b(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2},$$
$$c(x,y) = 4xye^{x^2+y^2};$$
trovare $f(x,y)$ tale che
$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & c(x,y) \\ c(x,y) & b(x,y) \end{pmatrix}$$

Es. 3 Siano dati gli insiemi

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1, \quad z \geq 0, \quad z \leq 5+x+y\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Consideriamo l'insieme unione.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 .$$

Calcolare $Vol(\Omega)$ ed $Area(\partial\Omega)$.

ES. VECCHIO

ORDINAMENTO

Es. Siccome $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ si ha $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f = 0$

dove $x_0 \times y_0 \times z_0 = 0$. Quindi basta porre $\bar{f} = 0$ su $\bar{A} \setminus A$.

Cerchiamo ora i punti ove $\nabla f = 0$ su $\mathring{\bar{A}}$.

Imponiamo il sistema

$$\begin{cases} 2yz(1+\ln(xyz)) = 0 \\ 2xz(1+\ln(xyz)) = 0 \\ 2yx(1+\ln(xyz)) = 0 \end{cases} \iff \{1+\ln(xyz)=0\} \cup \{(x,y,z) \text{ t.c. due tra questi numeri è nullo}\} \notin \mathring{\bar{A}}$$

Osserviamo che $\{1+\ln(xyz)=0\} \iff \{xyz = \frac{1}{e}\}$ ma

è facile vedere che $\{xyz = \frac{1}{e},\ x+y+z \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} = \phi$

(ciò si può vedere ad esempio calcolando $\max_{\substack{x+y+z=1 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0}} xyz > \frac{1}{e}$)

oppure usando $|xyz| \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{27} < \frac{1}{e}$).

Quindi tutti i Max e Min sono sulla frontiera.

$\partial\bar{A} = A_1 \cup A_2$ $\quad A_1 = \{(x,y,z) \in \partial\bar{A} \mid \text{almeno uno tra } x, y, z \text{ è nullo}\}$

$$A_2 = \{(x,y,z) \mid x\neq 0\ y\neq 0\ z\neq 0 \quad x+y+z = 1\}.$$

Ovviamente $\max_{A_1} \bar{f} = \min_{A_1} \bar{f} = \boxed{0}$.

Su A_2 invece usiamo i moltiplicatori

$$\begin{cases} 2yz(\ln(xyz)+1) = \lambda \\ 2xz(\ln(xyz)+1) = \lambda \\ 2xy(\ln(xyz)+1) = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = \frac{1}{e} \\ x+y+z = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Osserviamo che per quanto detto sopra il primo sistema $\{xyz = \frac{1}{e},\ x+y+z=1\} = \phi$ quindi resta $(x,y,z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

pertanto $\max \bar{f} = 0$ e $\min \bar{f} = \frac{2}{27}\ln\left(\frac{1}{27}\right) = \boxed{-\frac{2}{27}\ln 27}$

Es. $\Longrightarrow$) Questa implicazione è ovvia e segue dal teo. di inversione dell'ordine di derivazione che si può applicare essendo $f \in C^3$.

$a = f_{xx}$, $b = f_{xy}$, $c = f_{xy}$, $b = f_{yy}$

$\Longrightarrow$) $c_x = f_{xxy} = f_{yxx} = a_y$ e

$c_y = f_{yxy} = f_{xyy} = b_x$.

$\Longleftarrow$) Se $c_x = a_y$ allora per un teorema visto a lezione

$\exists\, h \in C^1$ t.c. $h_x = a$, $h_y = c$

e siccome $c_y = b_x$ allora per lo stesso motivo

$\exists\, g \in C^1$ t.c. $g_x = c$, $g_y = b$.

D'altra parte $h_y = c = g_x \Longrightarrow \exists\, H \in C^1$ t.c. $H_y = g$, $H_x = h$.

Quindi combinando $h_x = a$, $h_y = c = g_x$, $g_y = b$, $H_y = g$, $H_x = h$

allora $a = H_{xx}$, $b = H_{yy}$, $c = H_{xy}$.

La regolarità $H \in C^3$ segue dal fatto che $a, b, c \in C^1$ per ipotesi.

Risolviamo il secondo punto del quesito.
A tal fine seguiamo lo schema seguito sopra e
calcoliamo h, g ed H.

Ricordiamo che la funzione h (il cui gradiente è (a,c)) si può ricavare per integrazione (essendo $\mathbb{R}^2$ stellato):

$$h(x_0,y_0)=\int_{\gamma(x_0,y_0)} a\,dx+b\,dy$$ dove $\gamma(x_0,y_0)$ è il segmento tra $(0,0)$ e (x_0,y_0).

Quindi

$$h(x_0,y_0)=\int_0^1 a(tx_0,ty_0)x_0\,dt+\int_0^1 b(tx_0,ty_0)y_0\,dt=$$

$$=\int_0^1 2x_0e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt+4\int_0^1 t^2x_0^3e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt+4\int_0^1 t^2x_0y_0^2e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt$$

$$=\int_0^1 2x_0e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt+2\int_0^1\frac{tx_0^3}{(x_0^2+y_0^2)}\frac{d}{dt}\left(e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\right)dt$$

$$+2\int_0^1\frac{tx_0y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\frac{d}{dt}\left(e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\right)dt$$

$$=\int_0^1 2x_0e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt-2\int_0^1\frac{x_0^3}{x_0^2+y_0^2}e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt$$

$$+2\frac{x_0^3}{x_0^2+y_0^2}e^{x_0^2+y_0^2}-2\int_0^1\frac{x_0y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)}e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}dt$$

$$+2\frac{x_0y_0^2}{x_0^2+y_0^2}e^{x_0^2+y_0^2}=$$

$$=\boxed{2x_0e^{x_0^2+y_0^2}}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\left(2x_0-\frac{2x_0^3}{x_0^2+y_0^2}-2\frac{x_0y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}=0$$

Similmente troviamo

$$\boxed{g(x_0,y_0)=2y_0e^{x_0^2+y_0^2}}$$

Resta quindi da calcolare H come la funzione tale che

$H_x = h$ e $H_y = g$, quindi ragionando come sopra

$$H(x_0, y_0) = \int_{\gamma(x_0,y_0)} h\,dx + g\,dy = \int_0^1 2t\,x_0\, e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\, x_0\, dt + \int_0^1 2t\,y_0\, e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\, y_0\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\right] \frac{\cancel{2t}\, x_0^2}{\cancel{2t}(x_0^2+y_0^2)}\, dt + \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} e^{t^2(x_0^2+y_0^2)}\right) \cdot \frac{\cancel{2t}\, y_0^2}{\cancel{2t}(x_0^2+y_0^2)}\, dt$$

$$= e^{x_0^2+y_0^2} - 1.$$

Ovviamente basta ora scegliere $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ poiché

$$H(f) = H\left(e^{x^2+y^2} - 1\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

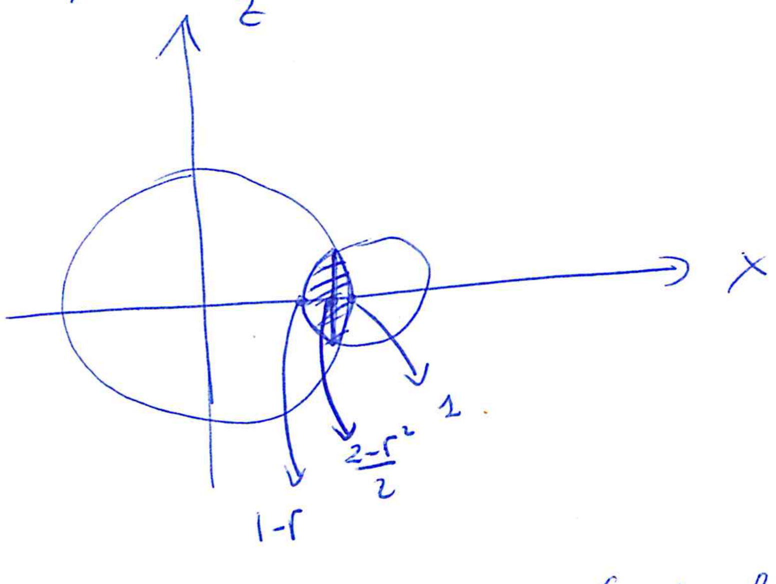
Es. Consideriamo le sfere

$S_1=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ e $\{(x-1)^2+y^2+z^2=r^2\}$.

Allora con semplici calcoli si trova che:

- $S_1\cap S_2=\emptyset$ se $r>2$
- $S_1\cap S_2=\left\{(x,y,z)\mid x=\frac{2-r^2}{2},\ y^2+z^2=1-\left(\frac{2-r^2}{2}\right)^2\right\}$ se $r\in[0,2]$.

Inoltre con semplici considerazioni si ha che Ω_r si trova ruotando intorno all'asse x la seguente regione piana nel piano (x,z)



Pertanto integrando per sezione (ad x fissato) si trova

$$Vol(\Omega_r)=\int_{1-r}^{1-\frac{r^2}{2}}\pi\left(r^2-(x-1)^2\right)dx+\int_{1-\frac{r^2}{2}}^{1}\pi\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\pi r^2\left(r-\frac{r^2}{2}\right)-\frac{\pi}{3}\left[\left(-\frac{r^2}{2}\right)^3+r^3\right]+\pi\frac{r^2}{2}-\frac{\pi}{3}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^3\right]=$$

$$=\boxed{\pi r^3-\frac{\pi}{2}r^4+\frac{\pi}{24}r^6-\frac{\pi}{3}r^3+\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^3}.$$

Per calcolare $\lim_{r\to\infty} \iiint_{\Omega_r} |\operatorname{arctg} z|\,dx\,dy\,dz$

osserviamo che $\Omega_r = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ se $r>2$ e

quindi basta calcolare

$$2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z>0}} (\operatorname{arctg} z)\,dx\,dy\,dz = 2\pi \int_0^1 (1-z^2)\operatorname{arctg} z\,dz$$

$$= 2\pi\left[z\operatorname{arctg} z\right]_0^1 - 2\pi\int_0^1 \frac{z}{1+z^2}\,dz - 2\pi\left[\int_0^1 \left(\frac{z^3}{3}\right)'\operatorname{arctg} z\,dz\right] =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} - \pi\ln 2 - 2\pi\left[-\frac{z^3}{3}\operatorname{arctg} z\right]_0^1 \cancel{-2\pi\left[\frac{z^3}{3}\frac{}{1+z^2}\right]_0^1}$$

$$+ 2\pi\int_0^1 \frac{z^3}{3(1+z^2)}\,dz$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \pi\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\frac{\pi}{4} \cancel{-\frac{2\pi}{3}} + \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \frac{z(z^2+1)}{z^2+1} - \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \frac{z}{1+z^2}\,dz$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{2} - \pi\ln 2 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{2\pi}{3\cdot\cancel{4}} - \frac{\pi}{3}\ln 2}.$$

Es. Osserviamo che Ω_1 e Ω_2 non sono disgiunti

ma $\Omega = \Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_2$

dove $\tilde{\Omega}_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z < 0\}$

ed $\Omega_1 \cap \tilde{\Omega}_2 = \phi$.

Quindi $Vol(\Omega) = Vol(\Omega_1) \cup Vol(\tilde{\Omega}_2)$.

Calcoliamo separatamente

$Vol(\tilde{\Omega}_2) = \frac{1}{2}$ Vol (Palla di raggio 1) $= \boxed{\frac{2}{3}\pi}$

$$Vol(\Omega_1) = \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_0^{5-x-y} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} 5\,dx\,dy$$

$$- \underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 1} x\,dx\,dy}_{\substack{\text{" per dispari} \\ 0}} - \underbrace{y \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy}_{\substack{\text{" per dispari} \\ 0}}$$

$$= \boxed{5\pi}$$

Quindi $Vol(\Omega) = \left(\frac{2}{3}+5\right)\pi$.

Per il calcolo dell'area di $\partial\Omega$ abbiamo

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$ con unione disgiunta

dove

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \leq 0\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1, \quad 0 < z \leq 5+x+y\},$$

$$\Sigma_3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 < 1, \quad z = 5+x+y\}.$$

Quindi $\text{Area}(\partial\Omega) = \text{Area}(\Sigma_1) + \text{Area}(\Sigma_2) + \text{Area}(\Sigma_3)$.

Calcoliamo separatamente:

$$\text{Area}(\Sigma_1) = \frac{1}{2}\,\text{Area}(\text{sfera di raggio } 1) = \boxed{2\pi}$$

$$\text{Area}(\Sigma_3) = \iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{1+1^2+1^2}\; dx\,dy = \boxed{\sqrt{3}\,\pi}$$

$$\text{Area}(\Sigma_2) = \iint_{\substack{\theta\in[0,2\pi) \\ 0<z\leq 5+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}} \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\|\, d\theta\, dz$$

Con $\varphi(\theta,z) = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ z\end{pmatrix} \Longrightarrow \cancel{\varphi_\theta \wedge \varphi_z = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

$$\Longrightarrow \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

quindi

$$\mathrm{Area}(\Sigma_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(5 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) = \boxed{10\pi}$$

In conclusione

$$\mathrm{Area}(\partial\Omega) = \boxed{2\pi + \sqrt{3}\pi + 10\pi}$$