TERZO COMPITINO DI ANALISI 2
INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE ED EDILE
25-05-2023

Esercizio 1 Calcolare l' area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la seguente curva del piano (y, z):

$$\Gamma = \{(y, z) | (y-2)^2 + z^2 = 1, -y+2 \leq z \leq 0\}.$$

Esercizio 2 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz - xy\cos(xyz), -yz, -2x^3y + yz\cos(xyz))$$

lungo le seguenti superfici:

- $\Sigma_1 = \partial\Omega$ con
$$\Omega = \{(x, y, z) | y^2 \leq x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\},$$
orientando Σ_1 lungo la normale che punta verso l' esterno di Ω;
- $\Sigma_2 = \{(x, y, z) | y^2 = x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\}$ orientata lungo la normale ottenuta per restrizione da quella definita nel punto precedente su Σ_1.

Soluzioni

Esercizio 1

Usando Guldino si ha che l'area cercata e' pari a

$$2\pi \int_{\gamma} y ds$$

dove γ e' parametrizzata da

$$(\frac{7}{4}\pi, 2\pi) \ni t \to (2 + \cos t, \sin t)$$

e quindi abbiamo

$$2\pi \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} (2 + \cos t) dt = 2\pi(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Esercizio 2

Il campo vettoriale ha divergenza nulla. Essendo Σ_1 una superficie chiusa ed essendo il campo regolare si ha che il flusso lungo Σ_1 e' nullo.

Per calcolare il flusso lungo Σ_2 osserviamo che questa non e' una superficie chiusa. Tuttavia se aggiungiamo a Σ_2 due tappi T_1, T_2 troviamo Σ_1, dove T_1 e T_2 sono dati rispettivamente da $(x, 1, z)$ con $x^2 + z^2 \leq 1$ e $(x, 2, z)$ con $x^2 + z^2 \leq 4$. Inoltre se vediamo T_1 come porzione di Σ_1 abbiamo che la normale esterna risulta essere $\nu_1 = (0, -1, 0)$, ed analogamente se vediamo T_2 come porzione di Σ_1 abbiamo che la normale esterna risulta essere $\nu_2 = (0, 1, 0)$. Quindi per il teorema della divergenza abbiamo che il flusso lungo Σ_2 e' pari all'opposto della somma dei flussi lungo T_1, T_2 con le normali descritte sopra. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} Flusso(\vec{F}, \Sigma_2, \nu) &= -Flusso(\vec{F}, T_1, \nu_1) - Flusso(\vec{F}, T_2, \nu_2) \\ &= \int_{T_1} yz dS - \int_{T_2} yz dS = 0 \end{aligned}$$