**Terzo compitino di Analisi 2**
**per Ingegneria Civile** $03-06-2022$

**Esercizio 1** Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_M |z| dS$$

dove

$$M = \{(x,y,z) | x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$$

**Esercizio 2** Studiare la convergenza degli integrali impropri

$$\int\int_A e^{-xy} dxdy, \int\int_A e^{-x^2y^2} dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y) | x>0, y>0\}$$

**Esercizio 3** Si trovino al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$y' = -5xy + \alpha x.$$

Provare che esiste un unico valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l' equazione ammette una soluzione che soddisfi

$$y(0) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 2.$$

Provare esiste un unico valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l' equazione ammette una soluzione che soddisfi

$$y(0) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2} = 2.$$

## Soluzioni

**Esercizio 1** Osserviamo che sui punti di $M$ abbiamo $z \geq 0$ quindi nell'integrale possiamo sostituire $|z|$ con $z$. Passando alle coordinate sferiche (che componiamo con una traslazione di vettore $(0,0,1)$) troviamo

$$\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\cos\varphi + 1)\sin\varphi d\varphi) d\theta = 2\pi[-\frac{1}{4}\cos(2\varphi)]_0^{\pi} + 2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi} = 4\pi$$

**Esercizio 2** In generale mostriamo che $\int\int_A e^{-x^k y^k} dxdy$ non converge per ogni $k > 0$. Osserviamo che

$$\int_0^R \int_0^R e^{-x^k y^k} dxdy = \int_0^R (\int_0^R e^{-x^k y^k} y dx) \frac{dy}{y} = \int_0^R (\int_0^{yR} e^{-z^k} dz) \frac{dy}{y}$$

e per ogni $R > 1$ abbiamo

$$\cdots \geq \int_1^R (\int_0^1 e^{-z^k} dz) \frac{dy}{y} = (\int_0^1 e^{-z^k} dz) \int_1^R \frac{dy}{y} = (\int_0^1 e^{-z^k} dz) \ln R$$

e quindi per confronto abbiamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-x^k y^k} dxdy \geq \lim_{R\to\infty} (\int_0^1 e^{-z^k} dz) \ln R = \infty$$

**Esercizio 3** La soluzione generale si trova moltiplicando l' equazione per

$$y' e^{\frac{5}{2}x^2} + 5xy e^{\frac{5}{2}x^2} = \alpha x e^{\frac{5}{2}x^2} \iff y(x) e^{\frac{5}{2}x^2} = y(0) + \int_0^x \alpha t e^{\frac{5}{2}t^2} dt$$

$$\iff y(x) e^{\frac{5}{2}x^2} = y(0) + \frac{\alpha}{5}(e^{\frac{5}{2}x^2} - 1)$$

e quindi essendo $y(0)$ arbitrario possiamo scrivere la soluzione generale come segue

$$y(x) = \frac{\alpha}{5} + Ce^{-\frac{5}{2}x^2}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ troviamo $C = -\frac{\alpha}{5}$ e quindi

$$y(x) = \frac{\alpha}{5} - \frac{\alpha}{5} e^{-\frac{5}{2}x^2}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha}{5} - \frac{\alpha}{5} e^{-\frac{5}{2}x^2} = \frac{\alpha}{5}.$$

Quindi imponendo la condizione che il limite valga 2 troviamo $\alpha = 10$.
Per rispondere all' ultima questione osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\alpha}{5} - \frac{\alpha}{5} e^{-\frac{5}{2}x^2}}{x^2} = \frac{\alpha}{2}$$

e quindi basta scegliere $\alpha = 4$.