PARTE A

1. L'integrale
$$\int\int_{\Omega} xydxdy$$
dove dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 2, \max\{|x|,|y|\} < 1, x\cdot y > 0\}$ vale:
A: 2 B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: 4 E: N.A.

2. Sia data la funzione $f(x,y) = |\cos x \cos y - \sin x \sin y|$ allora il massimo di $f(x,y)$ sull' insieme
$$A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$$
vale
A: N.E. B: 2 C: 1 D: 0 E: N.A.

3. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ vale
A: -1 B: N.A. C: 2 D: N.E. E: 1

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)}$ vale:
A: N.E. B: 1 C: N.A. D: 0 E: $\frac{1}{2}$

5. Data la funzione $f(x,y) = e^{\sin(x+y)} + x^2y + xy^2$, allora $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$ vale
A: 2 B: -1 C: N.A. D: 0 E: 1

6. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln x + \ln y$. Allora il massimo di $f(x,y)$ su $K = \{(x,y)|\max\{x,y\} \leq 1, \min\{x,y\} > 0\}$ vale:
A: $\ln 2$ B: 1 C: 0 D: N.A. E: 2

7. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} \max\{x^4, y^4\}dxdy$$
con
$$\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} < 1\}$$
vale:
A: $\frac{4}{3}$ B: 4 C: $\frac{8}{3}$ D: N.A. E: 2

8. Il volume di Ω dove
$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+2y^2+3z^2 \leq 1, x\cdot y\cdot z < 0\}$$
vale
A: $\frac{2\pi}{6\sqrt{6}}$ B: $\frac{2\pi}{3\sqrt{6}}$ C: $\frac{4\pi}{3\sqrt{6}}$ D: N.A. E: $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$

9. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln(|xy|)}{\ln(|xy|)}$$
vale
A: N.A. B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: N.E. E: 0

10. Il seguente integrale di prima specie $\int_\gamma e^{x^2-y^2}ds$ dove
$$\gamma = \{(x,y)|x^2-y^2 = 0, x^2+y^2 \leq 1, x\cdot y \geq 0\}$$
vale
A: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B: $\frac{2}{\sqrt{2}}$ C: N.A. D: 2 E: 4

CODICE=428447

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

17 Settembre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	X	○	○	○
2	○	○	X	○	○
3	○	○	X	○	○
4	○	X	○	○	○
5	X	○	○	○	○
6	○	○	X	○	○
7	X	○	○	○	○
8	○	X	○	○	○
9	○	○	○	○	X
10	○	○	○	X	○

CODICE=428447

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 17 Settembre 2018

Cognome:____ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1

Per ogni $\alpha > 0$ definiamo

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

come segue

$$f_\alpha(x, y) = |x|^\alpha |y|^\alpha.$$

Provare che $f_\alpha(x, y)$ e'differenziabile in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$f(x, y, z, w) = xz - yw$$

e $K = \{(x, y, z, w) | x^2 + y^2 + w^2 + z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3

Rappresentare graficamente nel piano la regione

$$B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1, 0 < y < x < 1\}$$

e calcolare il seguente integrale

$$\int_B \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy.$$

Soluzioni

Esercizio 1

Abbiamo che $\nabla f_\alpha(0,0) = 0$, quindi si tratta di capire per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente limite esiste finito

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Passando alle polari si ha che questo limite esiste se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Abbiamo che il gradiente della funzione si annulla in $(0,0,0,0)$. Per studiare la frontiera scriviamo il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ -w = 2\lambda y \\ -y = 2\lambda w \\ x = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Allora troviamo che prima e terza equazione implica $4\lambda^2 z = z$ e seconda e terza implicano $4\lambda^2 w = w$. Quindi e' facile vedere che siamo ridotti a due casi: $z = 0, w = 0$ oppure $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Nel primo caso non abbiamo soluzioni, nel secondo caso abbiamo per $\lambda = \frac{1}{2}$ le condizioni $z = x, -w = y, -y = w, x = z$ e quindi troviamo punti del tipo $(a,0,0,a)$ che per via del vincolo imposto dalla quinta equazione implica $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ oppure $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Osserviamo che $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$. Invece per $\lambda = -\frac{1}{2}$ si trova il sistema $z = -x, -w = -y, -y = -w, x = -z$ e quindi troviamo punti del tipo $(a,b,b,-a)$ con il vincolo $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Inoltre $f((a,b,b,-a) = -b^2 - a^2 = -\frac{1}{2}$. Quindi il massimo vale $\frac{1}{2}$ ed il minimo vale $-\frac{1}{2}$.

Esercizio 3

La regione B si descrive graficamente come segue

Passando in polari B si rappresenta come segue

$$\{(\rho,\theta)|\theta \in (0,\frac{\pi}{4}), 0 < \rho < \frac{1}{\cos\theta}\}$$

quindi l'integrale richiesto diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \cos\theta d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}$$

PARTE A

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $L(e_1) = e_1, L(e_2) = e_1 + e_2, L(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. dove e_1, e_2, e_3 sono la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Gli autovalori di L sono:

   A: N.A. B: $(-1, -1, -1)$ C: $(1, 1, 1)$ D: $(1, 1, -1)$ E: $(1, -1, -1)$

2. Sia dato il seguente sottoinsieme di matrici $Mat(n \times n)$

   $$V = \{A \in Mat(n \times n) | a_{11} = a_{nn}\}$$

   dove a_{ij} indica l'elemento della matrice posto sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna. Allora V gode della seguente proprieta'

   A: non e' uno spazio vettoriale B: e' uno sp. vett. di dim. $n^2 - 2$ C: e' uno sp. vett. di dim. $n^2 - 1$ D: N.A. E: e' uno sp. vett. di dim. 2

3. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 4}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 8}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di n) l' applicazione lineare cosi' definita: $Lp(x) = p(x^2)$. Allora $dim(kerL)$ vale:

   A: 2 B: N.A. C: 1 D: 0 E: 3

4. Il seguente sottospazio vettoriale delle matrici $n \times n$

   $$V = \{A \in mat(n \times n) | a_{11} = 0\}$$

   dove a_{11} indica l' elemento della matrice A posto sulla prima riga e sulla prima colonna, ha dim.

   A: $(n-1)(n+1)$ B: n^2 C: $n(n+1)$ D: N.A. E: $n(n-1)$

5. La matrice simmetrica $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

   A: e' definita positiva B: e' definita negativa C: $detA = 0$ D: e' indefinita E: N.A.

6. Sia $W = span\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = p(2)\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 3). Allora $dimW$ e':

   A: N.A. B: 2 C: 1 D: 4 E: 3

7. Il seguente sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a 5

   $$\{p \in \mathbb{R}_{\leq 5}[x] | p(1) = 1\} \subset \mathbb{R}_{\leq 5}[x]$$

   gode della seguente proprieta'

   A: e' uno sp. vett. di dim. 4 B: non e' uno spazio vettoriale C: e' uno sp. vett. di dim. 3 D: e' uno sp. vett. di dim. 5 E: N.A.

8. Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ allora gli autovalori di A sono:

   A: $(2, 1, -1)$ B: $(2, -1, -1)$ C: $(2, 1, 1,)$ D: N.A. E: $(2, i, -i)$

9. Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] | p'''(0) = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 2). Allora $dimW$ e':

   A: 1 B: 2 C: 3 D: N.A. E: 0

10. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \to W$ lineare ed suriettiva. Allora necessariamente

    A: $dimV = dimW$ B: $dimV < dimW$ C: $dimV \geq dimW$ D: $dimV > dimW$ E: N.A.

CODICE=899285

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

17 Settembre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1			X		
2			X		
3				X	
4	X				
5	X				
6					X
7		X			
8	X				
9			X		
10			X		

CODICE=899285

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 17 Settembre 2018

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Siano date le applicazioni lineari

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}(t)$$

dove $T(x, y, z) = x + (2y - z)t + zt^2$ ed

$$S : \mathbb{R}_{\leq 2}(t) \to \mathbb{R}^2$$

dove $S(p(t)) = (p(0), p(1))$ (si ricorda che $\mathbb{R}_{\leq 2}(t)$ indica lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due nella variabile t). Calcolare $dim(kerS \circ T)$ e $dim(ImS \circ T)$

Esercizio 2
Calcolare gli autovalori dell' applicazione lineare $L : \mathbb{R}_{\leq 3}(t) \to \mathbb{R}_{\leq 3}(t)$ definita come $L(p(t)) = p'(t)$. Dire se L e' diagonalizzabile.

Esercizio 3 Sia dato il seguente sottospazio vettoriale delle matrici 2×2

$$V = span\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$$

Determinare tutti i valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in V$.

Sol. Esercizio 1 Con semplici considerazioni si ha che la matrice associata ad $S \circ T$ e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango vale 2 (pertanto $dim(Im) = 2$ e $dim(Ker) = 1$

Sol. Esercizio 2 La matrice associata rispetto alla base canonica $1, t, t^2, t^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che h come polinomio caratteristico λ^4. Quindi l'unico autovalore e'$\lambda = 0$ con molteplicita' algebrica 4. Tuttavia la moteplicita'geometrica vale 1 essendo il rengo della matrice 3.

Sol. Esercizio 3 Bisogna risolvere nelle incognite x, y il sistema $x + 2y = a, 2x + y = 1, 2x = 0, y = b$, da cui si deduce facilmente $b = 1, a = 0$.