PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

   A: $(0,0)$ B: N.A. C: $(1,1)$ D: $(0,1)$ E: N.E.

2. L'integrale

$$\int\int_{\Omega} xydxdy$$

   dove $\Omega = \{(x,y)| \max\{|x|,|y|\} \leq 1, x^2+y^2 > 1, x\cdot y > 0\}$ vale:

   A: $\frac{1}{8}$ B: $\frac{5}{8}$ C: $\frac{3}{8}$ D: N.A. E: $\frac{1}{4}$

3. Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = e^{|\sin(\ln(1+xy))|}$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: sella B: max relativo C: min relativo ma non assoluto D: N.A. E: min assoluto

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{(x+y)^2}$ vale

   A: 0 B: $-\infty$ C: N.A. D: $+\infty$ E: N.E.

5. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(|x+y|)}{\ln(|x|)+\ln(|y|)}$ vale

   A: 1 B: -1 C: N.A. D: 0 E: N.E.

6. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2))}{x^2+2y^2}$ vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: 1 C: N.A. D: 0 E: N.E.

7. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue

$$A = \{(y,z)| \max\{|y|,|z|\} < 1, y^2+z^2 > 1, y > 0\}$$

   Allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $\frac{1}{3}\pi$ B: $\frac{4}{3}\pi$ C: N.A. D: $\frac{1}{2}\pi$ E: $\frac{2}{3}\pi$

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(|y|+|x|)-y^2}{x^2+y^2}$ vale:

   A: 1 B: 0 C: N.A. D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

9. Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = e^{\sin(|xy|)}$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: min assoluto B: sella C: max relativo D: N.A. E: min relativo ma non min assoluto

10. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2-y^2}$ vale

    A: N.A. B: 0 C: 1 D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

CODICE=201351

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

14 Gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=201351

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 14 Gennaio 2020

Cognome:____ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1
Provare l' esistenza di $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$f(x,y,x) = x^2 + y^2 + z^2$$

e

$$K = \{(x,y,z)|x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Calcolare esplicitamente $\min_K f$ e $\max_K f$

Esercizio 2
Calcolare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$ e studiarne la natura (dire se si tratta di max locale, min locale, sella, max assoluto, min assoluto).

Esercizio 3
Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma z dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 = z^2, z \in (0,1)\}$$

Soluzioni

Esercizio 1

L' insieme K e' un triangolo in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ quindi e' un compatto. Inoltre la funzione f e' continua quindi possiamo applicare Weiestrass. Per il calcolo esplicito di max e min usiamo la parametrizzaione. Quindi parametrizziamo K come segue:

$$T \ni (x,y) \to (x,y,1-x-y) \in K$$

dove T e' il trianglo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0),(0,1),(1,0)$. Quindi si tratta di trovare max e min di $g(x,y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2 = 2x^2+2y^2+1-2x-2y+2xy$ su T. Per cercare i candidati punti di max e min interni imponiamo $\nabla g = 0$ e troviamo $(x,y) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Quindi dobbiam registrare il valore $g(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Per quanto riguarda il bordo del triangolo usiamo la paremerrizzazione dei tre lati del triangolo e siamo ridotti a studiare

$$\max_{t\in[0,1]} 2t^2+1-2t = 1, \ \min_{t\in[0,1]} 2t^2+1-2t = \frac{1}{2}.$$

Quindi $\max_k f = 1$ e $\min_K f = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2

I punti critici sono dati dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases}$$

che implica con semplici considerazione $y = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Quindi i punti corrispondenti sono $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Calcolando l' hessiano in tali putni si vede che

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi $(0,0)$ e' di sella mentre gli altri due punti sono di minimo locale.

Inoltre siccome $\lim_{|(x,y)|\to\infty} x^4 + y^4 - xy = \infty$ abbiamo che il minimo assoluto esiste e quindi va ricercato tra i punti critici. Ne deduciamo che i punti di minimo assoluto sono $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 3
Usiamo la parametrizzazione

$$\Phi : [0,1] \times [0, 2\pi] \ni (t, \theta) \to (t\cos\theta, t\sin\theta, t)$$

e quindi

$$|\partial_t \Phi \times \partial_\theta \Phi| = \sqrt{2}t$$

da cui l' integrale si riduce a

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} t dt d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2}t^2 dt = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$$

PARTE A

1. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p(x+1) = p(x-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 3   B: 4   C: N.A.   D: 6   E: 1

2. Siano
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right], a \in \mathbb{R}\}$$
   e
$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \left[\begin{smallmatrix} b & b \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right], b \in \mathbb{R}\}$$
   allora $dim(V + W)$ vale

   A: 3   B: 1   C: 4   D: N.A.   E: 2

3. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p(x) + p'(x) + p''(x) + p''' + p'''' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 3   B: 4   C: 1   D: N.A.   E: 0

4. Siano $V = \{x \in \mathbb{R}^5 | x = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{y \in \mathbb{R}^5 | y = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ d \\ c \\ c \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}\}$ allora $dim(V \cap W)$ vale

   A: 3   B: 2   C: 4   D: N.A.   E: 1

5. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l' applicazione lineare definita come segue sulla base canonica $e_1, \ldots, e_n$ $L(e_i) = e_{i-1}$ per $i = 2, \ldots, n$ ed $L(e_1) = e_n$. Allora il determinante di L vale:

   A: $(-1)^{n+1}$ B: $(-1)^{2n+1}$ C: N.A.   D: 1   E: $(-1)^n$

6. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq} 3[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = p(x+1) - p(x-1)$. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(0, 1, 1, 1)$ B: $(0, 0, 1, 1)$ C: N.A.   D: $(0, 0, 0, 1)$ E: $(0, 0, 0, 0)$

7. Sia $L : mat(2 \times 2) \to mat(2 \times 2)$ l' applicazione lineare tale che $L(A) = A - A^t$ dove A^t indica la trasposta di A. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(0, 2, 2, 2)$ B: $(0, 0, 2, 2)$ C: N.A.   D: $(2, 2, 2, 2)$ E: $(0, 0, 0, 2)$

8. La matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} -7 & -4 \\ -4 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gode della seguente proprieta'

   A: N.A.   B: definita pos.   C: definita neg.   D: $detA = 0$ E: indefinita

9. Lo spazio vettoriale
$$V = \{A \in Mat(3 \times 3) | 2A + A^t = 0\}$$
   dove A^t indica la matrice trasposta, ha dimensione

   A: N.A.   B: 2   C: 3   D: 1   E: 0

10. Sia
$$W = \left\{A \in Mat(3 \times 3) | A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b+c \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$
    Allora lo spazio vettoriale
$$V = \left\{B \in Mat(3 \times 3) | B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in W\right\}$$
    ha dimensione

    A: N.A.   B: 6   C: 5   D: 4   E: 3

CODICE=153541

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

14 Gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=153541

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 14 Gennaio 2019

Cognome:____ ,
Nome:____

Matricola:________________________________

Esercizio 1
Calcolare la dimensione dei seguenti spazi vettoriali

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 5}[x] | p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 5}[x] | p(x) = -p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 2
Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3
Sia data l'applicazione lineare

$$L : mat(2 \times 2) \ni A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A \in mat(2 \times 2)$$

Calcolare $dim(kerL)$ e $dim(ImL)$.

Sol. Esercizio 1

Consideriamo le applicazioni lineari

$$L_1, L_2 : \mathbb{R}_{\leq 5}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 5}[x]$$

dove $L_1(p(x)) = p(x) - p(-x)$ e $L_2(p(x)) = p(x) + p(-x)$.
Le dimensioni degli spazi V e W corrispondono alla dimensione del nucleo di L_1 ed L_2. Tali dimensioni sono date (per il teorema della dimensione) dalla dimensione di $\mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ meno la dimensione dell' immagine (ossia il rango delle matrici associate rispetto ad una qualsiasi base). Scrivendo la matrice associata ad L_1 ed L_2 rispetto alla base canonica si vede che il rango vale 3, e quindi $dim V = dim W = 3$.

Sol. Esercizio 2

Gli autovalori della matrice sono $(1, 1, 2)$. Quindi si tratta di capire per quali valori di a si ha che la dimensione del nucleo della matrice $A_a - Id$ vale 2. Scrivendo explicitamente si vede che tale matrice ha rango 1 se e solo se $a = 3$. Quindi la matrice e' diagonalizzabile solo per per $a = 3$.

Sol. Esercizio 3

Detta $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha che $L(A) = \begin{pmatrix} 3b - 2c & 2a + 3b - 2d \\ -3c + 3d - 3a & 2c - 3b \end{pmatrix}$. Calcoliamo il nucleo, la dimensione dell' immagine si trova usando il teorema della dimensione. Si tratta di calcolare la dimensione delle matrici A tali che

$$\begin{pmatrix} 3b - 2c & 2a + 3b - 2d \\ -3c + 3d - 3a & 2c - 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 2c - 3b = 0 \\ 2a + 3b - 2d = 0 \\ -3c + 3d - 3a = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si vede che le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Quindi il nucleo e l' immagine di L hanno dimensione 2.