Analisi 2 Ingegneria Biomedica $14-09-2020$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.

Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Trovare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = e^{\frac{x}{1+x^2+y^2}}$.

Esercizio 2 Calcolare $\frac{\partial^4 f}{\partial_x^2 \partial y^2}(0,0)$ dove $f(x,y) = \sin(\ln(1+x^2+y^2))$.

Esercizio 3 Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{(x^2+y^2)}} \sin(e^{\frac{1}{(x^2+y^2)}})$.

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Calcolare $\int\int_\Omega xydxdy$ dove

$$\Omega = \{(x,y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 5 Calcolare il volume del solido Ω ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme

$$A = \{(y,z) | (y-1)^2 + z^2 \leq 1, y \geq 1\}.$$

Soluzioni

1. $(\pm 1, 0)$. Imponendo il gradiente uguale a $(0,0)$ siamo ricondotti al seguente sistema:
$$\begin{cases} (1+x^2+y^2)-2x^2=0 \\ -2xy=0 \end{cases}$$
Dalla seconda $x=0$ oppure $y=0$. Se $x=0$ la prima e' impossibile, mentre se $y=0$ allora la prima ammette come soluzioni ± 1.

2. -4. Sviluppando con Taylor sfruttando sviluppo si $\ln(1+t)$ e di $\sin t$ si trova
$$f(x,y)=(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+o((x^2+y^2)^2)$$
e quindi $\frac{1}{2!2!}\frac{\partial^4 f}{\partial_x^2 \partial y^2}(0,0)=-1$

3. 0. Infatti la funzione e' prodotto tra una funzione infinitesima ed una limitata.

4. Abbiamo che $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ dove
$$\Omega_1=\{(x,y)|y\geq x,(x-1)^2+y^2\leq 1\}$$
ed
$$\Omega_2=\{(x,y)|y<x,x^2+(y-1)^2\leq 1\}$$
e per simmetria
$$\int\int_{\Omega_1} xydxdy=\int\int_{\Omega_2} xydxdy.$$
In polari $\Omega_1=\{(\rho,\theta)|\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}),\rho(\theta)\in(0,2\cos\theta)\}$ e quindi
$$\int\int_{\Omega_1} xydxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta$$
$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta d\theta=-\frac{4}{6}[\cos^6\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{6(\sqrt{2})^6}=\frac{1}{12}$$
e quindi l' integrale iniziale vale $\frac{1}{6}$.

5. Usiamo Guldino e quindi calcoliamo $\int\int_A ydydz$. A tal fine osserviamo che cambiando variabili $y-1=Y$, $z=Z$ abbiamo che l' integrale equivale a

$$\int\int_B (1+Y)dYdZ$$

dove

$$B=\{(Y,Z)|Y^2+Z^2\leq 1, Y\geq 0\}$$

e quindi usando le polari

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho d\rho d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}.$$

Quindi il volume vale $\pi^2+\frac{4}{3}\pi$.