PARTE A

1. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} xydxdy$$
con
$$\Omega = \{(x,y)|x^2+4y^2<1, |y|<\frac{|x|}{2}, x\cdot y>0, x>0\}$$
vale:

A: $\frac{1}{32}$ B: $\frac{1}{16}$ C: $\frac{1}{64}$ D: N.A. E: $\frac{1}{8}$

2. L'integrale
$$\int\int_{\Omega} xdxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y)|\frac{1}{2} \leq \max\{|x|,|y|\} \leq 1, x\cdot y>0, x>0\}$ vale:

A: N.A. B: $\frac{1}{4}$ C: $\frac{5}{8}$ D: $\frac{7}{16}$ E: $\frac{3}{8}$

3. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y^2}-\cos^2(x+y^2)}{x^2-y^2}$ vale

A: 0 B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: N.E. E: 1

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)}{x+y}$ vale

A: 0 B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: $-\infty$

5. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

A: $(1,1)$ B: $(0,0)$ C: $(0,1)$ D: N.E. E: N.A.

6. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = e^{\sin(|xy|-\frac{\pi}{2})}$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

A: min relativo ma non min assoluto B: N.A. C: sella D: max locale E: min assoluto

7. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue
$$A = \{(y,z)|\max\{|y|,|z|\}<1, \min\{|y|,|z|\}>\frac{1}{2}, y>0\}$$
Allora $vol(\Omega)$ vale

A: $\frac{5}{4}\pi$ B: $\frac{1}{4}\pi$ C: $\frac{3}{4}\pi$ D: N.A. E: $\frac{1}{2}\pi$

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\ln(x^2)+\ln(y^2)}$ vale

A: -1 B: 1 C: N.A. D: 0 E: N.E.

9. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln^2(1+|x|)-y^2}{x^2+y^2}$ vale:

A: N.E. B: N.A. C: 1 D: $\frac{1}{2}$ E: 0

10. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = 2e^{x^2y^2}-(x^4+y^4)$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

A: N.A. B: min assoluto C: min relativo ma non min assoluto D: sella E: max locale

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

19 Settembre 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	○	●
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=094407

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 19 Settembre 2019

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:________________________________

Esercizio 1
Calcolare $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ e } K = \{(x,y) | x^2 e^{y^2} + y^2 e^{x^2} \le 1\}.$$

Esercizio 2
Calcolare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue $f(x,y) = y^3 e^{xy+x}$ e studiarne la natura (dire se si tratta di max locale, min locale, sella, max assoluto, min assoluto).

Esercizio 3
Calcolare il volume del solido Ω ottenuto ruotando attorno all'asse z il seguente insieme

$$A = \{(y,z) | \sqrt{2} z^2 < y < \sqrt{1-z^2}\}$$

Soluzioni

Esercizio 1

Osserviamo che il gradiente di f si annulla nel punto $(0,0)$ dove la funzione f vale zero. Ma osserviamo che questo non puo'essere ne'di max ne'di min assoluto poiche'su K la funzione assume sia valori negativi che valori positivi. Quindi il max ed il min sono raggiunti sul bordo.
A tal fine usiamo i moltiplicatori di Lagrange e risolviamo i due sistemi

$$\begin{cases} 2xe^{y^2} + 2xy^2e^{x^2} = 0 \\ 2yx^2e^{y^2} + 2ye^{x^2} = 0 \\ x^2e^{y^2} + y^2e^{x^2} = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \lambda(2xe^{y^2} + 2xy^2e^{x^2}) = 2x \\ \lambda(2yx^2e^{y^2} + 2ye^{x^2}) = -2y \\ x^2e^{y^2} + y^2e^{x^2} = 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del primo sistema troviamo $x = 0$ e dalla seconda equazione $y = 0$ che sono incompatibili con la terza equazione. Concentriamoci quindi sul secondo sistema. Dalla prima equazione deduciamo due casi: $x = 0$ oppure $x \neq 0$. Nel primo caso $x = 0$ deduciamo dalla terza equazione $y = \pm 1$. Nel secondo caso $x \neq 0$ troviamo $\lambda(e^{y^2} + y^2e^{x^2}) = 1$ che implica $\lambda \neq 0$ e quindi $e^{y^2} + y^2e^{x^2} = \frac{1}{\lambda}$. D'altra parte dalla seconda equazione abbiamo due opzioni $y = 0$ oppure $y \neq 0$. Ragionando come sopra troviamo se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Mentre se $y \neq 0$ allora

$$x^2e^{y^2} + e^{x^2} = -\frac{1}{\lambda}$$

Quindi se sia x sia y sono non nulli allora $e^{y^2} + y^2e^{x^2} = \frac{1}{\lambda}$ e $x^2e^{y^2} + e^{x^2} = -\frac{1}{\lambda}$. Quindi $e^{y^2} + y^2e^{x^2} + x^2e^{y^2} + e^{x^2} = 0$ che non ha soluzione. Pertanto troviamo come candidati punti di max $(\pm 1, 0)$ e come punti di minimo $(0, \pm 1)$, i cui valori di max e min sono 1 e -1.

Esercizio 2

Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y^3(y+1)e^{xy+x} = 0 \\ (3y^2 + xy^3)e^{xy+x} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione sono $y = 0, y = -1$. Dalla seconda deduciamo che se $y = 0$ allora x e' arbitrario, e se $y = -1$ allora $x = 3$. Quindi i punti critici sono $(x, 0)$ e $(3, -1)$. Studiamo la natura di questi punti. Calcolando l'hessiano si trova $Hf(3, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ mentre $Hf(x, 0)$ e' la matrice nulla. Quindi $(3, -1)$ e' di sella mentre nei punti $(x, 0)$ non possiamo dedurre nulla dal test dell' hessiano. Tuttavia osserviamo che nei punti $(x, 0)$ la funzione e' nulla mentre e'positiva per i punti con ordinata negativa ed e'positiva per i punti con ordinate positiva, quindi i punti $(x, 0)$ sono di sella.

Esercizio 3 Osserviamo che dobbiamo imporre la condizione $\sqrt{2}z^2 < \sqrt{1 - z^2}$ ossia $z \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Pertanto usando integrazione per sezioni

$$vol(\Omega) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz(1 - z^2 - 2z^4)dz = 2\pi[z - \frac{z^3}{3} - \frac{2}{5}z^5]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\pi\frac{11}{15}.$$

PARTE A

1. Per ogni $n > 1$ fissato sia $L_n : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq}2[x]$ l' applicazione lineare tale che $L_n(p(x)) = p(x+n)$. Allora gli autovalori di L_n sono

   A: $(-1,-1,-1)$ B: $(-1,-1,1)$ C: $(1,1,1)$ D: N.A. E: $(-1,1,1)$

2. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq}2[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = p(x)+p'(x+1)+p''(x+2)$. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(-1,-1,-1)$ B: $(-1,1,1)$ C: N.A. D: $(-1,-1,1)$ E: $(1,1,1)$

3. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p(x) + p'(x) + p''(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 4 B: 3 C: 1 D: N.A. E: 2

4. Sia $n > 1$ allora lo spazio vettoriale
$$V_n = \{A \in Mat(n \times n) | A + A^t = 0\}$$
   dove A^t indica la matrice trasposta, ha dimensione

   A: $\frac{n(n-1)}{2}$ B: $\frac{n(n+1)}{2}$ C: $\frac{(n+1)(n-1)}{2}$ D: N.A. E: n^2

5. La matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gode della seguente proprieta'

   A: definita pos. B: N.A. C: definita neg. D: indefinita E: $detA = 0$

6. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 3 B: 2 C: 1 D: 4 E: N.A.

7. Siano
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], a \in \mathbb{R}\}$$
   e
$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \left[\begin{smallmatrix} b & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right], b, c \in \mathbb{R}\}$$
   allora $dim(V + W)$ vale

   A: 4 B: N.A. C: 3 D: 1 E: 2

8. Sia
$$W = \left\{A \in Mat(3 \times 3) | A = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], a \in \mathbb{R}\right\}.$$
   Allora lo spazio vettoriale
$$V = \left\{B \in Mat(3 \times 3) | B \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in W\right\}$$
   ha dimensione

   A: 3 B: N.A. C: 6 D: 5 E: 4

9. Sia $L : mat(2 \times 2) \to mat(2 \times 2)$ l' applicazione lineare tale che $L(A) = A + A^t$ dove A^t indica la trasposta di A. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(0,0,0,2)$ B: N.A. C: $(2,2,2,2)$ D: $(0,0,2,2)$ E: $(0,2,2,2)$

10. Siano $V = \{x \in \mathbb{R}^5 | x = \left[\begin{smallmatrix} a \\ a \\ a \\ b \\ b \end{smallmatrix}\right], a, b \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{y \in \mathbb{R}^5 | y = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ c \end{smallmatrix}\right], c \in \mathbb{R}\}$ allora $dim(V \cap W)$ vale

    A: 5 B: 3 C: 4 D: N.A. E: 1

CODICE=179823

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

19 Settembre 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=179823

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 19 Settembre 2019

Cognome:_____________________________________ ,
Nome:_______________________________________

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcolare la dimensiona di $KerT$ e ImT.
- Trovare una base di $KerT$ e ImT.

Esercizio 2
Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcolare di rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Fissando $k = 1$ trovare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R}^4$ del sistema

$$A_1 x = 0$$

  e'datta dalle quaterne $(t, 0, -t, t)$ con t parametro libero.

Esercizio 3
Sia data l'applicazione lineare $L : mat(n \times n) \to mat(n \times n)$ definita come segue $L(A) = A - A^t$.
Dire se L e' diagonalizzabile giustificando la risposta.

Sol. Esercizio 1 La matrice associata ha rango 2 quindi la dimensione dell'immagine e'due, per il teorema della dimensione il nucleo e'ridotto al vettore nullo.
Per trovare una base dell'immagine basta prendere i due vettori colonna che costituiscono la matrice.

Sol. Esercizio 2

Il determinante del primo minore 3×3 e' nullo solo per $k = 0, -1$. Quindi per $k \neq 0, -1$ il rango e' 3. Per $k = 0$ il rango e' tre poiche'il minore fatto dalla seconda, terza e quarta colonna e' non nullo. Per $k = 1$ il rango e' due come si vede calcolando i determinanti di tutti i minori 3×3 che sono nulli ed osservando che il minore 2×2 fatto dalle prime due righe e dalle ultime due colonne e' diverso da zero.
Le soluzioni del sistema richiesto dipendono da un parametro t e sono $(t, 0, -t, t)$.
Sol. Esercizio 3

Osserviamo che le matrici simmetriche stanno nel nucleo di L ed hanno dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$, mentre quelle antisimmetriche hanno autovalore 2 ed hanno dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. Siccome la somma delle dimensioni degli autospazi trovati sopra vale $n^2 = dim(mat(n \times n))$, abbiamo trovato una base di autofunzioni, e quindi l'operatore dato e' diagonalizzabile.