Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

01 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	X				
2			X		
3					X
4				X	
5				X	
6	X				
7				X	
8		X			
9	X				
10	X				

CODICE=202068

PARTE A

1. L'integrale
$$\int\int_{\Omega} \cos(x^2+y^2)dxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 < 2\pi, x\cdot y > 0\}$ vale:

   A: 0 B: 2 C: $\frac{1}{4}$ D: 1 E: N.A.

2. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x - y^2}{x^2-y^2}$ vale:

   A: 1 B: $\frac{1}{2}$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

3. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} xdxdy$$
con
$$\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} < 1, \min\{|x|,|y|\} > \frac{1}{2}, x > 0\}$$
vale:

   A: $\frac{1}{4}$ B: N.A. C: $\frac{5}{8}$ D: $\frac{1}{8}$ E: $\frac{3}{8}$

4. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue
$$A = \{(x,z)|\max\{|x-5|,|z-1|\} \leq 4\}.$$
Allora $vol(\Omega)$ vale

   A: N.A. B: 210π C: 420π D: 640π E: 800π

5. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln|xy|)}{\ln(x^2+y^2)}$ vale

   A: -1 B: N.E. C: N.A. D: 0 E: 1

6. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = e^{xy} - xy$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: min assoluto B: sella C: max locale D: N.A. E: min relativo ma non min assoluto

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy-\cos^2(x-y)+1}{x^2+y^2}$ vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: N.E. C: 0 D: 1 E: N.A.

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(|xy|)}{\ln(x^2+y^2)}$ vale

   A: N.A. B: N.E. C: 0 D: ∞ E: 1

9. Sia data la funzione $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

   A: $(0,0)$ B: $(1,1)$ C: N.A. D: N.E. E: $(0,1)$

10. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(|xy|)}{\ln(1+x^2+y^2)}$$
vale

    A: $-\infty$ B: 1 C: N.E. D: 0 E: N.A.

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 01 Luglio 2019

Cognome:____________________________________,
Nome:______________________________________

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 + xy \leq 1\}$ e la funzione $f(x, y) = x + 3y$.

- Dire, giustificando la risposta, se esistono $\max_E f$ e $\min_E f$;
- in caso affermativo calcolare $\max_E f$ e $\min_E f$.

Esercizio 2
Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = e^x \sin(xy)$. Trovare i punti critici di f e studiarne la natura (min. loc., max loc., sella).

Esercizio 3
Calcolare

$$\int\int\int_\Omega \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dxdydz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y^2 + z^2 \leq x^2, x \geq 0\}.$$

Esercizio 1

Osserviamo che E e' chiuso essendo insieme di punti dove una funzione continua e' minore o uguale a zero. Se verifichiamo che e' limitato allora concludiamo per il teorema di Weiestrass che max e min esistono. Per provare che E e' limitato osserviamo che

$$x^2 + 2y^2 + xy \geq x^2 + 2y^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = \frac{3}{4}x^2 + y^2$$

e quindi $E \subset \{\frac{3}{4}x^2 + y^2 \leq 1\}$ e questo ultimo insieme e'chiaramnete limitato essendo un ellisse.

Osserviamo che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ non ha soluzioni. Studiamo quindi f sul bordo di E con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Siamo quindi ricondotti a studiare prima il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y + x = 0 \\ x^2 + 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

che non ha soluzioni tranne. E poi il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \lambda y \\ 3 = 4\lambda y + \lambda x \\ x^2 + 2y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che dalla prima equazione necessariamnete $\lambda \neq 0$ quindi possiamo dividere per λ e troviamo $x = \frac{1}{7\lambda}, y = \frac{5}{7\lambda}$ che grazie alla terza equazione impone $\lambda = \pm\sqrt{\frac{8}{7}}$. Quindi $\max_E f = \frac{8}{\sqrt{14}}$ e $\min_E f = -\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Esercizio 2

I punti critici sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^x \sin(xy) + ye^x \cos(xy) = 0 \\ e^x x \cos(xy) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo due alternative: $x = 0$ oppure $\cos(xy) = 0$. Nel primo caso, usando la prima equazione troviamo $y = 0$. Nel caso $\cos(xy) = 0$

dalla prima equazione troviamo $e^x \sin(xy) = 0$ che implica $\sin(xy) = 0$, che e' impossibile nel caso in cui $\cos(xy) = 0$.
Quindi l'unico punto critico e' $(x, y) = (0, 0)$.
Osserviamo che $(0, 0)$ e' un punto di sella poiche' il segno della funzione $f(x, y)$ e' uguale al segno di $\sin(xy)$, che e' positivo se $xy > 0$ ed (x, y) sono piccoli, ed e' negativo se $xy < 0$ e (x, y) sono piccoli. Quindi abbiamo una sella.

Esercizio 3

Il dominio Ω puo' essere spezzato in due parti disgiunte: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 \leq x^2, 0 \leq x < 1\}$$

e

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 \leq 2 - x^2, 1 < x \leq \sqrt{2}\}.$$

quindi bisogna calcola i due integrali su Ω_1 e su Ω_2 e sommare. Abbiamo

$$\int\int\int_{\Omega_1} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dxdydz = \int_0^1 x(\int_0^x \int_0^{2\pi} d\rho d\theta) = \frac{2\pi}{3}$$

ed inoltre

$$\int\int\int_{\Omega_2} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dxdydz = \int_1^{\sqrt{2}} x(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{2\pi} d\rho d\theta)$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx = -\frac{2\pi}{3}[(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

quindi l'integrale dato vale $\frac{4\pi}{3}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

01 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1			X		
2	X				
3				X	
4				X	
5				X	
6					X
7					X
8					X
9		X			
10				X	

CODICE=896239

PARTE A

1. Sia $n > 1$ allora lo spazio vettoriale
$$V_n = \{A \in Mat(n \times n) | a_{i1} = a_{in}, \forall i = 1, ..., n\}$$
ha dimensione
A: $(n-1)^2$ B: $\frac{n(n-1)}{2}$ C: $n(n-1)$ D: N.A. E: n^2

2. Il rango della matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
vale
A: 2 B: N.A. C: 1 D: 3 E: 4

3. Sia $V = \{A \in Mat(3 \times 3) | A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$. Allora $dimV$ vale:
A: N.A. B: 1 C: 2 D: 0 E: 3

4. Sia
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | tr(A \cdot B) = 0 \text{ dove } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\}$$
(tr indica la traccia, ossia somma degli elementi della diagonale, e $\cdot$ indica il prodotto matriciale).
A: 4 B: 2 C: N.A. D: 3 E: 1

5. Siano V e W definiti come segue
$$V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = 0\}, W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(2) = p(1) = p(0)\}$$
Allora $d = dim(V + W)$ vale:
A: 2 B: 1 C: N.A D: 4 E: 3

6. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = 3p(x) + 4p'(x) + 5p''(x)$. Allora gli autovalori di L sono
A: $(5, 5, 5)$ B: $(1, 1, 1)$ C: N.A. D: $(4, 4, 4)$ E: $(3, 3, 3)$

7. La matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta'
A: indefinita B: definita pos. C: N.A. D: $detA = 0$ E: definita neg.

8. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p(1) + p'(2) + p''(3) + p'''(4) = 0\}$ allora $dimV$ vale
A: 5 B: 3 C: 1 D: N.A. E: 4

9. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p(1) = 0 = 2p(1)\}$ allora $dimV$ vale
A: 6 B: 7 C: 5 D: N.A. E: 4

10. Siano
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$$
e
$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$$
allora $dim(V + W)$ vale
A: 3 B: N.A. C: 4 D: 2 E: 1

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 01 Luglio 2019

Cognome:____ ,
Nome:____

Matricola:________________________________

Esercizio 1
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ introduciamo l'applicazione lineare

$$T_a : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$T_a(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(a) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

Dire, giustificando la risposta, per quali valori di a l'applicazione T_a e' bigettiva.

Esercizio 2
Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $T : mat(2 \times 2) \to mat(2 \times 2)$ definita come segue:

$$T(X) = A \cdot X - X \cdot A$$

- Calcolare $dim(\ker T)$;
- calcolare $dim(\mathrm{Im} T)$;
- provare che $\ker T \cap \mathrm{Im} T = \{0\}$.

Esercizio 3
Dire, giustificando la risposta, per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice risulta diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Esercizio 1

Osserviamo che se $a \neq 0, 1$ allora $p(x) \in \ker T_a \iff p(0) = p(a) = p(1) = 0$ e quindi $p(x)$ e un polinomio di grado due con tre radici distinte, da cui $p(x) \equiv 0$. Quindi T_a e' iniettivo e quindi anche suriettivo perche' opera tra spazi vettoriali della stessa dimensione.

Se $a = 0$ invece abbiamo che l'immagine di T_a e' contenuta nell'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e quindi l'immagine avrebbe al piu' dimensione 2 e quindi T_a non e' suriettivo.

Con ragionamento simile si vede che per $a = 1$ l'operatore T_a non e' suriettivo.

Quindi T_a e' invertibile se e solo se $a \neq 0, 1$.

Sol. Esercizio 2

Abbiamo che $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker T$ se e solo se

$$\begin{cases} a + b = a + c \\ a = b + d \\ c + d = a \\ c = b \end{cases}$$

quindi $X = \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$ e quindi

$$\ker T = span\Big\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\}. \tag{1}$$

Deduciamo quindi $dim \ker T = 2$.
Per il teorema della dimensione abbiamo che $dim(\text{Im}T) = 4 - dim \ker T = 2$.
Usando la formula di Grassman abbiamo che

$$dim(\text{Im}T \cap \ker T) = dim(\text{Im}T) + dim \ker T - dim(\text{Im}T + \ker T)$$

quindi se proviamo che

$$dim(\mathrm{Im}T + \ker T) = 4 \tag{2}$$

concludiamo.
A tal fine osserviamo che

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

e

$$T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Quindi, siccome $dim(\mathrm{Im}T) = 2$ abbiamo

$$\mathrm{Im}T = span\Big\{ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Big\}.$$

Combinando questo fatto con (1), ed osservando che le quattro matrici che generano $\ker T$ ed $\mathrm{Im}T$ sono linearmente indipendenti, deduciamo (2).

Sol. Esercizio 3

Il polinomio caratteristico della matrice e' $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1 - k)$. Quindi la matrice e' sicuramente diagonalizzabile se $k \neq 0, -2$ avendo la matrice tre autovalori distinti.
Se $k = 0$ allora dobbiamo verificare la molteplicita' geometrica di $\lambda = 1$ per la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

A tal fine basta calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

che vale 1 e quindi la molteplicita' geometrica di $\lambda = 1$ vale 2. Quindi anche per $k = 0$ la matrice e' diagonalizzabile.
Per $k = -2$ dobbiamo verificare la molteplicita' geometrica di $\lambda = -1$ per la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Siccome il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vale 2 ne deduciamo che la molteplicita' geometrica di $\lambda = -1$ vale 1. Quindi per $k = -2$ non e' diagonalizzabile.