PARTE A

1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue

$$A = \{(y,z)| \max\{|y|,|z|\} < 1, \max\{|y|,|z|\} > \frac{1}{2}, y > 0\}$$

Allora $vol(\Omega)$ vale

A: 2π B: $\frac{7}{4}\pi$ C: $\frac{5}{4}\pi$ D: N.A. E: $\frac{9}{4}\pi$

2. L'integrale

$$\int\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1, x\cdot y > 0\}$ vale:

A: $2\pi(\sqrt{2}-1)$ B: N.A. C: $4\pi(\sqrt{2}-1)$ D: $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$ E: $\pi(\sqrt{2}-1)$

3. Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = 2e^{xy} - (x^2+y^2)$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

A: min relativo ma non min assoluto B: max locale C: sella D: N.A. E: min assoluto

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln^2(1+|x|)-y^2}{x^2-y^2}$ vale:

A: 0 B: 1 C: $\frac{1}{2}$ D: N.E. E: N.A.

5. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(|x|+|y|)}{|x||y|}$ vale

A: N.E. B: 1 C: N.A. D: $\frac{1}{2}$ E: 0

6. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(\sqrt{1+x^2+y^2})$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

A: N.E. B: $(0,0)$ C: $(1,1)$ D: $(0,1)$ E: N.A.

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln|xy|}{\ln(x^2)+\ln(y^2)}$ vale

A: N.A. B: N.E. C: $\frac{1}{2}$ D: 1 E: -1

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^8}{x^8+y^{16}}$ vale

A: 0 B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: N.E. E: N.A.

9. Il seguente integrale

$$\int\int_\Omega x dxdy$$

con

$$\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1, |y| < |x|, x > 0\}$$

vale:

A: $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C: $2\sqrt{2}$ D: N.A. E: $\sqrt{2}$

10. Il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(|xy|)}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

vale

A: N.A. B: $+\infty$ C: N.E. D: 0 E: $-\infty$

CODICE=378085

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

22 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1		X			
2					X
3			X		
4				X	
5	X				
6		X			
7			X		
8				X	
9		X			
10		X			

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 22 Luglio 2019

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Sia dato l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 4y^2 + 2z^6 \leq 6\}$ e la funzione $f(x,y,z) = xyz^3$.

- Dire, giustificando la risposta, se esistono $\max_E f$ e $\min_E f$;
- in caso affermativo calcolare $\max_E f$ e $\min_E f$.

Esercizio 2
Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_\Omega |xy| \sin y^2 \cos(x^2+y^2) dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Esercizio 3
Calcolare

$$\int\int (1 + e^{\frac{y}{x}}) dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < x, y \geq 0, 1 < x < 3\}.$$

Soluzioni

Esercizio 1

L'esistenza segue dal teorema di Weiestrass.

Per calcolare max e min procediamo come segue. I punti interni interni in cui si annulla il gradiente sono dati dal sistema

$$\begin{cases} yz^3 = 0 \\ xz^3 = 0 \\ 3xyz^2 = 0 \end{cases}$$

Cio' implica che almeno una delle tre coordinate deve essere nulla e quindi in questi punti la funzione f si annulla, quindi per ora il candidato valore di max, min e' zero (con un semplice argomento di disparita'della funzione e di parita' del dominio si deduce che zero non puo' essere ne' max ne' min. Vediamo ora sul bordo e studiamo i due sistemi

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \\ 12z^5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 2z^6 = 6 \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} yz^3 = 2\lambda x \\ xz^3 = 8\lambda y \\ 3xyz^2 = 12\lambda z^5 \\ x^2 + 4y^2 + 2z^6 = 6 \end{cases}$$

Il primo non ha soluzioni, quindi ci concentriamo sul secondo sistema.

Se $z = 0$ allora la funzione f vale 0 e quindi ritroviamo gli stessi valori che abbiamo trovato facendo l'analisi dei punti critici interni.

Se $z \neq 0$ allora dalla terza equazione si trova $xy = 4\lambda z^3$ che a sua volta apre due scenari: $\lambda = 0$ oppure $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ allora dalla prima e seconda equazione $x = 0 = y$ e quindi troviamo i punti $(0, 0, \pm 3^{\frac{1}{6}})$ dove la f vale zero. Se invece $\lambda \neq 0$ allora $z^3 = \frac{xy}{4\lambda}$ e quindi dalla prima e dalla seconda equazione

$$xy^2 = 8\lambda^2 x, \quad x^2 y = 32\lambda^2 y \tag{1}$$

Osserviamo che dalla prima delle due equazioni in (??) deduciamo che $x = 0$ oppure $y^2 = 8\lambda^2$. Ma se $x = 0$ allora dalla prima equazione $y = 0$ e quindi ritroviamo i punti gia' calcolati sopra. Quindi $y^2 = 8\lambda^2$. Similmente dalla seconda delle due equazioni in (??) troviamo $x^2 = 32\lambda^2$. Infine dalla terza equazione si trova $z^3 = \frac{xy}{4\lambda}$ e quindi $z^6 = \frac{x^2y^2}{16\lambda^2} = 16\lambda^2$. Usando ora l'ultima equazione troviamo

$$(32 + 32 + 32)\lambda^2 = 6$$

da cui $\lambda^2 = \frac{1}{16}$. Quindi $x^2 = 2$, $y^2 = \frac{1}{2}$, $z^6 = 1$. Quindi $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1)$. Quindi con un semplice confronto si trova $min = -1$ e $max = 1$.

Esercizio 2

Osserviamo che per simmetria l'integrale dato equivale a

$$4 \int\int_A xy \sin y^2 \cos(x^2 + y^2) dxdy$$

dove $A = \{x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}, x, y > 0\}$. Quindi

$$\ldots = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 dy(\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2} - y^2}} x \cos(x^2 + y^2) dx$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 [\sin(x^2 + y^2)]_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{\pi}{2}-y^2}} = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 (1 - \sin y^2) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin^2 t) dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 3

Usando l'integrazione per fili troviamo

$$\int_1^3 (\int_0^x (1 + e^{\frac{y}{x}}) dy) dx = \int_1^3 [x + x(e - 1)] dx = e[\frac{x^2}{2}]_1^3 = 4e$$

PARTE A

1. La matrice

$$\left[\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right], \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e' diagonalizzabile per i seguenti valori di a, b:

A: N.A. B: $\forall b \neq 0$ C: $\forall a \neq 0$ D: $\forall a, b$ E: $\forall a, b$, t.c. $a \neq b$

2. Siano

$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right], a \in \mathbb{R}\}$$

e

$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \left[\begin{smallmatrix} b & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right], b, c \in \mathbb{R}\}$$

allora $dim(V + W)$ vale

A: N.A. B: 1 C: 4 D: 2 E: 3

3. Sia $L : mat(2 \times 2) \to mat(2 \times 2)$ l' applicazione lineare tale che $L(A) = A^t$ dove A^t indica la trasposta di A. Allora gli autovalori di L sono

A: $(-1, -1, -1, -1)$ B: $(1, 1, -1, -1)$ C: N.A. D: $(1, 1, 1, -1)$ E: $(1, 1, 1, 1)$

4. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

A: 3 B: N.A. C: 2 D: 1 E: 4

5. Siano $V = \{x \in \mathbb{R}^5 | x = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{y \in \mathbb{R}^5 | y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$ allora $dim(V \cap W)$ vale

A: 5 B: N.A. C: 0

D: 3 E: 4

6. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq} 2[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = p(x + 1)$. Allora gli autovalori di L sono

A: N.A. B: $(-1, -1, 1)$ C: $(-1, -1, -1)$ D: $(1, 1, 1)$ E: $(-1, 1, 1)$

7. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p(x) = p'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

A: 0 B: 3 C: N.A. D: 2 E: 1

8. La matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 9 \end{smallmatrix}\right]$ gode della seguente proprieta'

A: definita neg. B: $detA = 0$ C: N.A. D: definita pos. E: indefinita

9. Sia $n > 1$ allora lo spazio vettoriale

$$V_n = \{A \in Mat(n \times n) | a_{ii} = 0, \forall i = 1, ..., n\}$$

ha dimensione

A: $(n + 1)(n - 1)$ B: $n(n - 1)$ C: N.A. D: n^2 E: $\frac{(n+1)(n-1)}{2}$

10. Sia

$$V = \{A \in Mat(3 \times 3) | tr(A \cdot B) = 0 \text{ dove } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$$

(tr indica la traccia, ossia somma degli elementi della diagonale, e $\cdot$ indica il prodotto matriciale).

A: 8 B: 1 C: N.A. D: 0 E: 9

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

22 Luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=413191

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 22 Luglio 2019

Cognome:____________________________________ ,
Nome:_______________________________________

Matricola:________________________________

Esercizio 1
Studiare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 2x + z = b \\ 4x + 7y + z = c \end{cases}$$

Dire quando si ha esistenza ed unicita', esistenza e non unicita', non esistenza di soluzioni.

Esercizio 2
Sia dato l'insieme

$$V = \{L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 | L \text{ e' lineare e } L(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 0\}$$

dove e_1, e_2, e_3, e_4 sono la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- Provare che V e' un sottospazio vettoriale di

$$\{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | L \text{ e' lineare }\}.$$

- Calcolare $dimV$.

Esercizio 3
Sia $V = span\{x^2 + 2, 3x + 4, -x^2 + 6x + 6\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

- Calcolare $dimV$.
- Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $(k + 1)x^2 + 3kx + 4 \in V$.

Sol. Esercizio 1

La matrice completa associata al sistema e'

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & 7 & 1 & c \end{pmatrix}$$

quindi con mosse elementari si riduce a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & 5 & 1 & c-2a \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 6 & c-2a+5b-5a \end{pmatrix}$$

Siccome abbiamo sempre 3 pivot il sistema ammette una soluzione unica per ogni (a, b, c).

Sol. Esercizio 2

Siano L_1 ed L_2 due applicazioni lineari che si annullano su $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, allora la loro somma sara'ancora lineare e si annullera' su $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. La stessa proprieta' vale se si moltplica per uno scalare λ un'applicazione lineare che si annulla in $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
Siano ora $f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}^4$ tali che $\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4, f_2, f_3, f_4\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$. Allora un'applicazione lineare che sta in V e' univocamente definita dai valori che assume su f_2, f_3, f_4 (ognuno dei quali vive in $\mathbf{R}^4$), e quindi V ha dimensione 12.

Sol. Esercizio 3

Rispetto alla base canonica $1, x, x^2$ i polinomi hanno le componenti

$$(2, 0, 1), (4, 3, 0), (6, 6, -1)$$

quindi per calcolare la dimensione di V basta calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che vae 2.
Per rispondere alla seconda domanda, scrivendo tutto rispetto alla base canonica, siamo ricondotti a capire per quali k esiste almeno una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2a + 4b + 6c = 4 \\ 3b + 6c = 3k \\ a - c = k + 1 \end{cases}$$

La matrice completa risulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3k \\ 1 & 0 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Con mosse elementari puo' essere ridotto come segue:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3k \\ 0 & -4 & -8 & 2k-2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3k \\ 0 & 0 & 0 & 18k-6 \end{pmatrix}$$

Quindi una soluzione esiste se e solo se $k = \frac{1}{3}$.