PARTE A

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = \ln(1 + \cos(\sin(xy)))$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: min assoluto B: sella C: max relativo ma non assoluto D: N.A. E: max assoluto

2. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^4+y^4}-1}{xy}$ vale:

   A: 0 B: 1 C: $\frac{1}{2}$ D: N.E. E: N.A.

3. L'integrale
   $$\int\int_\Omega xydxdy$$
   dove $\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} \leq 2, \min\{|x|,|y|\} \geq 1, x \cdot y > 0\}$ vale:

   A: N.A. B: $\frac{9}{2}$ C: $\frac{9}{4}$ D: $\frac{8}{3}$ E: 3

4. Sia data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1 + \ln(|1 + x + y|)}$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

   A: $(1,1)$ B: $(0,0)$ C: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ D: N.E. E: N.A.

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue
   $$A = \{(y,z)| - 15 < y^2 + z^2 - 8y < -14\}$$
   Allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $2\pi^2$ B: $4\pi^2$ C: N.A. D: $8\pi^2$ E: $16\pi^2$

6. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-\cos(x^2y^2)}{\sin(x^2+2y^2)}$ vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: N.A. C: N.E. D: 0 E: 1

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-\ln(1+xy)-e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vale

   A: N.E. B: N.A. C: -1 D: 1 E: 0

8. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = \ln(1 + \ln(1 + |x||y|))$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: max relativo B: N.A. C: min rel ma non assoluto D: sella E: min assoluto

9. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x-2y)}{x^2+y^2}$ vale

   A: 1 B: $\frac{1}{2}$ C: $-\frac{1}{2}$ D: N.A. E: N.E.

10. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^8+y^8}-cos(x^4y^4)}{x^8+y^8}$ vale

    A: 1 B: N.A. C: 0 D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

CODICE=019905

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

24 Febbraio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1					X
2				X	
3		X			
4			X		
5				X	
6				X	
7					X
8					X
9					X
10	X				

CODICE=019905

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 24 Febbraio 2020

Cognome:____ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1
Calcolare la seguente derivata $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)$ dove $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y^2)$.

Esercizio 2
Calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$f(x,y,z) = x - 2y + z \text{ e } K = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 \le y \le 1\}.$$

Esercizio 3
Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_\Omega z dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 0, \max\{|x|,|y|\} > \sqrt{2}\}$$

Es. 1

Osserviamo che per Taylor

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} + o(\|x,y\|^4)$$

$$\cos(x+y^2) = 1 - \frac{(x+y^2)^2}{2} + \frac{(x+y^2)^4}{4!} + o(\|x,y\|^4)$$

$$\Longrightarrow e^{xy}\cos(x+y^2) = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{(x+y^2)^2}{2} - \frac{(x+y^2)^2}{2}\,xy + \frac{(x+y^2)^4}{4!} + o(\|x,y\|^4)$$

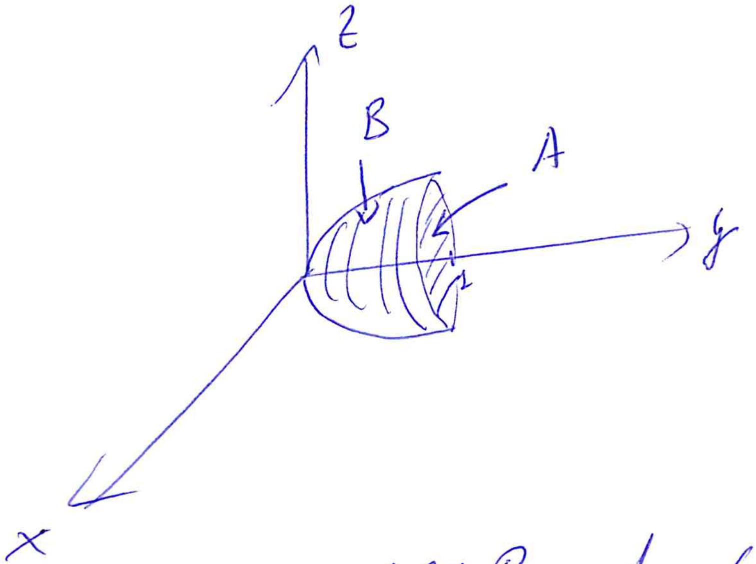
$$= 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{2} - xy^2 - \left(\frac{x^2+y^4+2xy^2}{2}\right) xy + \frac{x^4}{4!} + o(\|x,y\|^4)$$

$$= 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{2} - xy^2 - \frac{x^3y}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(\|x,y\|^4)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{1}{2}\,3! = \boxed{-3}.$$

Es. 2

Prima vediamo in quali punti interni si annulla ∇f. Scrivendo il ∇f si vede che non è mai nullo. Quindi lavoriamo su ∂K



Osserviamo che $\partial K = A \cup B$ dove

$$A = \{(x,1,z) \mid x^2+z^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y,z) \mid y = x^2+z^2, \quad x^2+z^2 \leq 1\}$$

Parametrizziamo A e B come segue:

$$\{x^2+z^2\} \leq 1 \xrightarrow{\Phi} (x,1,z) \Longmapsto f \circ \Phi = x-2+z$$

$$\{x^2+z^2 \leq 1\} \xrightarrow{\Psi} (x, x^2+z^2, z) \Longmapsto f \circ \Psi = x - 2x^2 - 2z^2 + z$$

Pertanto studiamo separatamente

$$\min_{x^2+z^2\leq 1} x-2+z \quad , \quad \max_{x^2+z^2\leq 1} x-2+z$$

$$\min_{x^2+z^2\leq 1} x+z-2x^2-2z^2 \quad , \quad \max_{x^2+z^2\leq 1} x+z-2x^2-2z^2 .$$

Per studiare i primi min e max osserviamo che $\nabla(x-2+z) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ non si annulla mai, quindi studiamo il bordo con Moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+z^2 \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix}\lambda \neq 0 \\ x = z\end{matrix} \Longrightarrow (x,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } (x,z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi $\min_{x^2+z^2\leq 1} x+z-2 = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{2}}-2}$ e $\max_{x^2+z^2\leq 1} x+z-2 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{2}}-2}$

Per studiare il max e min di $x+z-2x^2-2z^2$ su $x^2+z^2\leq 1$ osserviamo che il $\nabla(x+z-2x^2-2z^2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ equivale a

$$\begin{cases} 1-4x=0 \\ 1-4z=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4}\end{matrix}}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{16} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}} .$$

Per studiare sul bordo utilizziamo Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 1-4x = 2\lambda x \\ 1-4z = 2\lambda z \\ x^2+z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = (2\lambda+4)x \\ 1 = (2\lambda+4)z \\ x^2+z^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{matrix} 2\lambda+4 \neq 0 \\ x = y = \frac{1}{2\lambda+4} \end{matrix}$$

$$\implies (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\implies \min_{x^2+z^2=1} x+z-2x^2-2z^2 = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{2}}-2}$$

$$\max_{x^2+z^2=1} x+z-2x^2-2z^2 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{2}}-2}$$

Facendo un confronto tra i valori trovati si

ha $\min_K f = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{2}}-2}$ e $\max_K f = \boxed{\frac{3}{8}}$

Es. 3

Usando l'integrazione per fili si trova

$$\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \int_A dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_A dx\,dy\,(4-x^2-y^2) \quad \text{dove}$$

$$A = \left\{ (x,y) \,|\, x^2+y^2<4,\ \max\{|x|,|y|\} > \sqrt{2} \right\}$$

Osserviamo che

$$\iint_A (4-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2<4} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy - \iint_{\max\{|x|,|y|\}<\sqrt{2}} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^2 (4-\rho^2)\rho\,d\rho - 4\cdot 8 + \iint_{\max\{|x|,|y|\}<\sqrt{2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\pi\left(8-\frac{8}{3}\right) - 32 + 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2})^3 + 4\,\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2})^3$$

$$= 2\pi\cdot\frac{16}{3} - 32 + \frac{4\cdot 4}{3} + \frac{4\cdot 4}{3} = 2\pi\cdot\frac{16}{3} - 32 + \frac{32}{3}$$

$$= \boxed{\frac{32}{3}(\pi+1) - 32}$$

PARTE A

1. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p'(0) + p''(0) + p'''(0) = 0\}$ allora $dimV$ vale

   A: N.A. B: 4 C: 2 D: 1 E: 3

2. Sia A la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Allora $detA$ vale

   A: 3 B: 2 C: 0 D: -3 E: N.A.

3. Sia $L : mat(n \times n) \to mat(n \times n)$ l' applicazione lineare tale che $L(A) = A + A^t$ dove A^t indica la trasposta di A. Allora $dim(kerL)$ vale

   A: $\frac{n(n+1)}{2}$ B: N.A. C: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ D: $n(n+1)$ E: $\frac{n(n-1)}{2}$

4. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l' applicazione lineare definita come segue sulla base canonica $e_1, \ldots, e_n$ $L(e_i) = e_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, n-1$ ed $L(e_n) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ne_n$. Allora il determinante di L vale:

   A: $(-1)^n$ B: N.A. C: $(-1)^n n$ D: $(-1)^{n-1}n$ E: $(-1)^{n+1}$

5. Lo spazio vettoriale
$$V = \{A \in Mat(3 \times 3) | \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0\}$$
   dove a_{ij} indica l' elemento della matrice A posto sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna, ha dimensione

   A: 2 B: 6 C: 1 D: 8 E: N.A.

6. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p''(x) + p'''(x) + p''''(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 0 B: 3 C: 2 D: N.A. E: 4

7. Siano
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$$
   e
$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}\}$$
   allora $dim(V + W)$ vale

   A: 1 B: 2 C: 3 D: N.A. E: 4

8. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo $V_{x_0} = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p'(x) = p'(x + x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Allora $dimV_{x_0}$ vale

   A: N.A. B: 2 C: 4 D: 6 E: 3

9. Siano
$$V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = p(2) = p(3) = 0\}.$$
   Allora $dim(V)$ vale

   A: 1 B: N.A. C: 4 D: 3 E: 2

10. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq} 2[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = p(x + 1) - p'(x)$. Allora $dim(kerL)$ vale

    A: 0 B: 2 C: N.A. D: 1 E: 3

CODICE=177533

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

24 Febbraio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	X
2	○	○	○	X	○
3	○	○	○	○	X
4	○	○	○	○	X
5	○	○	○	X	○
6	○	○	X	○	○
7	○	○	X	○	○
8	○	X	○	○	○
9	X	○	○	○	○
10	X	○	○	○	○

CODICE=177533

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 24 Febbraio 2020

Cognome:____________________________________ ,
Nome:______________________________________

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Siano V e W due sottopsazi vettoriali di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ cosi definiti:

$$V = span\{x, x^2+1\} \text{ e } W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(0) = p(2), p(1) = 0\}.$$

Calcolare $dimV$, $dimW$, $dim(V \cap W)$, $dim(V+W)$.

Esercizio 2
Siano dati i vettori $v_1 = (0,2,3)$, $v_2 = (-1,0,1)$, $v_3 = (1,1,1)$. Provare che esiste un' unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = v_2 - v_3, f(v_3) = v_3 - v_1.$$

Calcolare $dim(ker f)$ e $dim(Im f)$. Scrivere la matrice dell' applicazione f rispetto alla base canonica.

Esercizio 3
Dato un insieme X di cardinalita' n sia

$$V = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

l' insieme delle funzioni da X in $\mathbb{R}$. Provare che V e' uno spazio vettoriale rispetto alla somma e prodotto per scalare cosi definiti:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

dove $f_1, f_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calcolare la dimensione di V ed esibire una base esplicita per V.

Es. 1

Siccome x ed x^2+1 sono lin. indipendenti si ha

$$\dim V = 2 .$$

Inoltre $W = \operatorname{Ker} L$ dove

$$L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \ni p \longrightarrow \begin{pmatrix} p(2)-p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

da cui

$\dim W = 4 - \dim \operatorname{Im} L$. Osservo che

$L(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $L(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $\dim \operatorname{Im} L = 2$

da cui $\dim W = 2$.

Per calcolare $\dim (V \cap W)$ osserviamo che

$$V \cap W = \{ \alpha x^2 + \alpha + \beta x \mid \alpha = 4\alpha + \alpha + 2\beta ,\ 2\alpha + \beta = 0 \}$$

$$= \{ \alpha x^2 + \beta x + \alpha \mid 2\alpha = -\beta \} \Rightarrow V \cap W = \{ \alpha x^2 - 2\alpha x + \alpha \}$$

$$\Rightarrow V \cap W = \operatorname{span} \{ x^2 - 2x + 1 \} \Rightarrow \dim V \cap W = 1 .$$

Da ciò deduciamo per Grassman

$$\dim (V + W) = 2 + 2 - 1 = 3 .$$

Es. 2

Basta osservare che v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Infatti $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -3+2+2 = 1 \neq 0$.

Per calcolare $\dim(\mathrm{Ker} f)$ e $\dim(\mathrm{Im} f)$ scriviamo la matrice associata ~~dd~~ f rispetto alla base v_1, v_2, v_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il det di questa matrice vale:

$1-1=0$ ed ha rango 2 (il primo minore 2×2 ha det 1).

Quindi $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$ e $\dim(\mathrm{Ker} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Im} f)$
$= 1$.

Per scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica basta usare la matrice di cambio di base da (v_1, v_2, v_3) a (e_1, e_2, e_3) e usare la ben nota formula ~~di~~ di cambio di base conoscendo la matrice rispetto alla base v_1, v_2, v_3 scritta sopra.

Es. 3

È ovvio che V sia uno spazio vettoriale (segue sostanzialmente dal fatto che $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale e tutte le sue proprietà si riflettono su V).

Dico che $\dim V = n$. Infatti osserviamo che se

$$f_i : X \to \mathbb{R} \text{ è definita come } f_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

dove $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Dico che $\{f_1, \dots, f_n\}$ è una base di V.

Infatti prima dimostro che generano:

sia $f : X \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x_i) = \lambda_i$ allora

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n.$$

Resta da verificare che $\{f_1, \dots, f_n\}$ sono lin. indipendenti. A tal fine osserviamo che

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \implies 0 = \lambda_1 f_1(x_1) + \dots + \lambda_n f_n(x_1) = \lambda_1 f_1(x_1) = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

~~analogo~~ e analogamente $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.