Analisi 2 Ingegneria Biomedica $29-06-2020$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.

Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Il gradiente della funzione $f(x, y) = |x + y|\sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(0, 0)$ quanto vale? (Scrivere N.E. se si pensa che non esiste, altrimenti scrivere le due componenti del gradiente).

Esercizio 2 Calcolare l' integrale doppio $\int\int_\Omega x dx dy$ dove

$$\Omega = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{3}y > x > 0\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(x^2+y^2)+sin^2(xy)-1}{x^4+y^4}$.

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + e^{x^2-y^2}$ e studiarne la natura (dire se si tratta di min locale, max locale, sella, max assoluto, min assoluto).

Esercizio 5

Calcolare il seguente integrale doppio $\int\int_\Omega \frac{x}{y} dx dy$ dove

$$\Omega = \{(x, y)|1 > y > x > 0, x^2 + y^2 > 1\}.$$

Soluzioni

1. $(0,0)$. Infatti la restrizione all' asse delle x di $f(x,y)$ vale $|x|^2$, la cui derivata in zero vale zero. Stesso argomento per la derivata parziale rispetto ad y.

2. $\frac{1}{6}$. Scritto in polari l' integrale corrisponde a

$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta = \frac{1}{6}$$

3. $-\frac{1}{2}$. Infatti usando Taylor al numeratore si ha

$$\cos(x^2+y^2) + sin^2(xy) - 1 = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 + o((x^2+y^2)^2)$$
$$= -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + o((x^2+y^2)^2)$$

e quindi il limite assegnato vale $-\frac{1}{2}$.

4. Scrivendo il gradiente di $f(x,y)$ e imponendolo uguale a $(0,0)$ troviamo

$$\begin{cases} 2x + 2xe^{x^2-y^2} = 0 \\ -2y - 2ye^{x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x(1+e^{x^2-y^2}) = 0 \\ y(1+e^{x^2-y^2}) = 0 \end{cases}$$

e quindi l' unico punto critico e' $(0,0)$. Scrivendo l' hessiano nel punto $(0,0)$ troviamo la matrice avente sulla diagonale 4 e -4 e i termini non diagonali nulli, quindi abbiamo un punto di sella.

5. Possiamo svolgere l' integrale per differenza

$$\int\int_T \frac{x}{y} dxdy - \int\int_S \frac{x}{y} dxdy$$

dove T e' il triangolo di vertici $(0,0),(0,1),(1,1)$ ed S e' il settore circolare dato in polari da $\rho \in (0,1)$, $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Quindi il primo integrale puo' essere calcolato come segue

$$\int\int_T \frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 (\int_0^y \frac{x}{y} dx) dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

L' integrale su S si puo' calcolare invece in polari e troviamo

$$\int\int_S \frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\rho d\theta = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}\ln 2.$$

Quindi l' integrale assegnato vale $\frac{1}{4}(1 - \ln 2)$.