PARTE A

1. Siano V e W i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 5) $V = span\{x, 1+x^3\}, W = span\{1+x+x^3, 1+x^5, x\}$ allora $dim(V \cap W)$ vale

   A: 2 B: N.A. C: 0 D: 1 E: 3

2. La matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

   A: e' definita positiva B: $det A = 0$ C: e' definita negativa D: N.A. E: e' indefinita

3. Siano $V = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x+2y-3z=0, x+y+z=0\}$ e $W = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | 2x+3y-2z=0\}$ allora $dim(V+W)$ vale

   A: 3 B: 0 C: 2 D: 1 E: N.A.

4. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo tale che $L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, L(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Allora $L(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$ vale:

   A: $\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ B: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ C: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ D: N.A. E: $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

5. Sia $L : R_{\leq 1}[x] \to R_{\leq 1}[x]$ (polinomi della variabile x di grado minore uguale di 1) l' applicazione lineare tale che $L(1+x) = x, L(1-x) = 1$. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2})$ B: $(i, -i)$ C: $(1,1)$ D: $(\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}})$ E: N.A.

6. Siano date le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ allora $det(A \cdot B)$ (qui $\cdot$ indica il prodotto di matrici) vale:

   A: 1 B: 0 C: N.A. D: -1 E: 2

7. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 5}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ lineare cosi' definita $L(p(x)) = (x+6)p'(x)$ ($\mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ indica i polinomi della variabile x di grado minore uguale di 5). Allora $dim(ImL)$ vale:

   A: 3 B: 2 C: 5 D: N.A. E: 4

8. Siano V e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ definiti come segue

$$V = span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\}, \quad W = span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

   Sia $L : V \cap W \to \mathbb{R}^3$ lineare, allora $d = dim(ImL)$ soddisfa necessariamente

   A: $1 \leq d \leq 2$ B: $0 \leq d \leq 2$ C: N.A D: $0 \leq d \leq 1$ E: $d \geq 1$

9. L' insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x+z+3w=0 \\ 2y+z-w=0 \end{cases}$$

   gode della seguente proprieta'

   A: ha un solo elemento B: dipende da un parametro C: N.A. D: dipende da 3 parametri E: da 2 parametri

10. Sia $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Allora il seguente sottospazio vettoriale delle matrici 2×2

$$\{A \in Mat(2 \times 2) | A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

    ha dimensione

    A: 4 B: 1 C: N.A. D: 3 E: 2

CODICE=526342

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

4 Febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	X				
2			X		
3			X		
4	X				
5	X				
6	X				
7			X		
8		X			
9					X
10					X

CODICE=526342

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 04 Febbraio 2019

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Dire per quali valori di k i seguenti vettori

$$(0,1,-1,0,1),(1,0,1,0,k),(-1,2,-3,0,0)$$

risultano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 2 Provare che esiste un'unica applicazione lineare

$$L : R_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^4$$

tale che

$$L(1+x) = e_1, L(1+x-x^3) = e_1+e_2, L(x^2-2x^3) = e_1+2e_2+3e_3,$$

$$L(1-x) = e_1+2e_2+3e_3+4e_4,$$

con e_1, e_2, e_3, e_4 base canonica di $\mathbb{R}^4$.
Calcolare $L(1+x+x^2+x^3)$.

Esercizio 3 Siano V, W, Z tre spazi vettoriali ed $f : V \to W$, $g : W \to Z$ due applicazioni lineari. Provare che

$$dim \ker(g \circ f) \leq dim(\ker f) + dim(\ker g).$$

Sol. Esercizio 1 La domanda equivale a capire per quali k il seguente sistema ammette una unica soluzione

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

A tal fine, detta A_k la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

e interpretando A_k come un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$, usando il teorema del rango basta vedere per quali k il rango di A_k vale 3. Osserviamo che la matrice fatta dalle prime tre righe ha determinante nullo, quindi bisogna imporre che almeno una delle seguenti matrici abbia determinante non nullo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

i cui rispettivi determinanti sono $k-2, k-2, 2-k$. Quindi i vettori dati sono lin. indipendenti se e solo se $k \neq 2$.

Sol. Esercizio 2 Per provare l'esistenza e l'unicita'di L basta verificare che

$$\{1 + x, 1 + x - x^3, x^2 - 2x^3, 1 - x\}$$

formano una base di $R_{\leq 3}[x]$. A tal fine basta scrivere la matrice le cui colonne sono le componenti dei suddetti vettori rispetto alla base canonica e verificare che il determinante e' non nullo. Piu'precisamnete

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

Per calcolare $L(1+x+x^2+x^3)$ osserviamo prima che per linearita' $L(1+x) = e_1$, $L(x^3) = L(x^3-x-1)+L(x+1) = -L(1+x-x^3)+L(1+x) = -e_1-e_2+e_1 = -e_2$, $L(x^2) = L(x^2-2x^3)+2L(x^3) = e_1+2e_2+3e_3-2e_2 = e_1+3e_3$ da cui $L(1+x+x^2+x^3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sol. Esercizio 3 Osserviamo che $\ker g \circ f = \{x \in V | f(x) \in \ker g\}$. Consideriamo quindi la mappa lineare

$$h : \ker g \circ f \ni x \to f(x) \in \ker g$$

Per il teorema della dimensione si ha $dim(\ker g \circ f) = dim(\ker h) + dim(\text{Im } h) \leq dim(\ker f) + dim(\ker g)$ dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che f e'una estensione di h e quindi i nuclei sono contenuti, ed abbiamo anche usato il fatto che l'immagine di h nella peggiore delle ipotesi e'uguale a $\ker g$.

PARTE A

1. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(x^2+y^2)}{x^4+y^4}$ vale

   A: 0 B: N.A. C: -1 D: N.E. E: 1

2. Il seguente integrale

$$\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

   dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1, x\cdot y\cdot z < 0, z > 0\}$ vale

   A: $\frac{\pi}{4}$ B: $\frac{\pi}{2}$ C: 2π D: π E: N.A.

3. Sia

$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+2y^2+3z^2 \leq 1, x\cdot y < 0\}$$

   allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $\frac{4\pi}{3\sqrt{6}}$ B: $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ C: $\frac{2\pi}{3\sqrt{6}}$ D: N.A. E: $\frac{\pi}{3\sqrt{6}}$

4. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = -xy + \sin(x^2+y^2)$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: min locale ma non min assoluto B: N.A. C: max locale D: min assoluto E: sella

5. Il seguente integrale

$$\int\int_\Omega \min\{|x|,|y|\}dxdy$$

   con

$$\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

   vale:

   A: N.A. B: $\frac{4}{3}$ C: 4 D: $\frac{2}{3}$ E: 2

6. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\frac{1}{x^2+y^2})}{\ln(x^2+y^2)}$ vale:

   A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: $\frac{1}{2}$

7. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ allora in $(0,0)$ la funzione

   A: $\nabla f(0,0) = (1,1)$ B: e' continua e differenziabile C: non e' continua D: non esiste $\nabla f(0,0)$ E: N.A.

8. Data la funzione $f(x,y) = e^{\sin^2(xy)}$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial^2 y}(0,0)$ vale

   A: N.A. B: 2 C: 1 D: 4 E: 0

9. Il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^{x^2+y^2}-1)}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}$$

   vale

   A: N.A. B: 0 C: 2 D: $\frac{1}{2}$ E: 1

10. L'integrale

$$\int\int_\Omega \max\{y,x\}dxdy$$

   dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1, y > \sqrt{3}x > 0\}$ vale:

   A: $\frac{1}{2}$ B: $\frac{1}{8}$ C: N.A. D: $\frac{1}{6}$ E: $\frac{1}{3}$

CODICE=892632

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

4 Febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1				X	
2	X				
3			X		
4	X				
5		X			
6	X				
7				X	
8				X	
9			X		
10				X	

CODICE=892632

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 04 Febbraio 2019

Cognome:______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Calcolare l'area della seguente superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, z \geq 0\}$$

Esercizio 2
Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

dove $A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 < z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

Esercizio 3
Calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

e $K = \{(x, y) | |x| \leq y \leq 1\}$

Esercizio 1
La superficie puo' essere parametrizzata come segue:

$$\Omega \ni (x,y) \to (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$$

dove $\Omega = \{(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\}$ Quindi usando la formula per il calcoloro dell'area abbiamo

$$Area(\Sigma) = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

Descrivendo in polari Ω troviamo

$$\Omega = \{(\rho,\theta)|\theta \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \rho(\theta) \in [0,\cos\theta]\}$$

e quindi

$$Area(\Omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos^2\theta}\frac{1}{\sqrt{1-t}}dtd\theta$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{1-t}]_0^{\cos^2\theta}d\theta = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(|\sin\theta|-1)d\theta = \pi - 2$$

Esercizio 2
Usando le sferiche abbiamo $A = \{(\rho,\theta,\varphi) \in (0,1)\times(0,2\pi)\times(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\}$. E equindi l'inetrgale diventa

$$\int_0^{2\pi}(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1 \rho^3\sin\varphi d\rho)d\varphi)d\theta = \frac{1}{2}\pi[-\cos\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 3
Si tratta di studiare il max e il min di $f(x,y)$ sul tiangolo di vertici $(0,0), (-1,1), (1,1)$, siano quindi dati i tre lati L_1, L_2, L_3 rispettivamente da $(0,0)$ a $(-1,-1)$, $(0,0)$ a $(1,1)$, $(-1,-1)$ a $(1,1)$. Osserviamo che il gradiente di f si annulla solo in $(0,0)$ che non e'interno quindi ci restringiamo alla frontiera. Osserviamo che f ristretto ad L_1 diventa $f(t,-t) = t^2+t^3$ per $t \in [-1,0]$, ristretto ad L_2 diventa $f(t,t) = t^2-t^3$ per $t \in [0,1]$, ristretto ad L_3 diventa $f(t,t) = t^2-1$ per $t \in [-1,1]$. Calcolando i rispettivi max e min si trova che il max e il min assoluto di f su K saranno $= \frac{4}{27}$ e -1