PARTE A

1. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{xy}$ vale:

   A: N.A. B: 0 C: $\frac{1}{2}$ D: 1 E: N.E.

2. Sia data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+\sqrt{|x||y|+x^2+y^2}}$ allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale

   A: $(0,1)$ B: $(0,0)$ C: N.A. D: N.E. E: $(1,1)$

3. L'integrale

   $$\int\int_\Omega xydxdy$$

   dove $\Omega = \{(x,y)|\max\{|x|,|y|\} \leq 2, \min\{|x|,|y|\} \leq 1, x\cdot y > 0\}$ vale:

   A: $\frac{8}{3}$ B: $\frac{9}{2}$ C: 3 D: N.A. E: $\frac{9}{4}$

4. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = e^{\cos(\ln(1+xy))}$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

   A: max assoluto B: sella C: min assoluto D: max relativo ma non assoluto E: N.A.

5. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^8+y^8}-cos(x^6y^6)}{x^8+y^8}$ vale

   A: 1 B: $\frac{1}{2}$ C: N.A. D: 0 E: N.E.

6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z l' insieme A definito come segue

   $$A = \{(y,z)|y^2+z^2 > 2y, y^2+z^2 < 4, y > 0\}$$

   Allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $2\pi(\frac{32}{3}-\pi)$ B: $2\pi(\frac{16}{3}-\pi)$ C: N.A. D: $2\pi(\frac{32}{3}-\frac{\pi}{2})$ E: $2\pi(\frac{32}{3}-2\pi)$

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-\ln(1+xy)-1}{x^2+y^2}$ vale

   A: 1 B: N.E. C: 0 D: -1 E: N.A.

8. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)-\sin(xy)}{\sin(x^2+2y^2)}$ vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: N.A. C: N.E. D: 1 E: 0

9. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x-2y)}{x^2-y^2}$ vale

   A: $-\frac{1}{2}$ B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: 1 E: N.E.

10. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x,y) = \ln(1+\ln(1+xy))$. Allora il punto $(0,0)$ e' di:

    A: min assoluto B: max relativo C: min rel ma non assoluto D: sella E: N.A.

CODICE=334124

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

03 Febbraio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	⊗
2	○	○	○	⊗	○
3	○	○	○	⊗	○
4	⊗	○	○	○	○
5	⊗	○	○	○	○
6	○	⊗	○	○	○
7	○	⊗	○	○	○
8	○	○	⊗	○	○
9	○	○	○	○	⊗
10	○	○	○	⊗	○

CODICE=334124

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 03 Febbraio 2020

Cognome:___________________________________ ,
Nome:_______________________________________

Matricola:_____________________________

Esercizio 1
Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 2
Calcolare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue $f(x,y) = \frac{x^3 y}{1+x^4+y^4}$ e studiarne la natura (dire se si tratta di max locale, min locale, sella, max assoluto, min assoluto).

Esercizio 3
Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega} (x^2+y^3) dxdydz$$

dove

$$\Omega = B_{(-1,0,2)}(3) \cap \{(x,y,z) | x \geq 0\}$$

con $B_{(-1,0,2)}(3)$ palla di $\mathbb{R}^3$ centrata in $(-1,0,2)$ di raggio 3.

Soluzioni

Esercizio 1

Usando le coordinate polari siamo ricondotti a

$$\int_1^2 \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$$

Esercizio 2

La ricerca dei punti critici equivale a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x^2y(1+x^4+y^4) - 4x^6y = 0 \\ x^3(1+x^4+y^4) - 4x^3y^4 = 0 \end{cases}$$

nel caso $xy \neq 0$ il sistema equivale a

$$\begin{cases} 3(1+x^4+y^4) - 4x^4 = 0 \\ 1+x^4+y^4 - 4y^4 = 0 \end{cases}$$

che e' impossibile, come si vede sommando le due equazioni. Quindi i punti critici vivono sugli assi dove vale la condizione $xy = 0$. Piu' precisamente i punti $(0, y)$ soddisfano il sistema e quindi sono tutti punti critici, mentre non soddisfano la seconda equazione i punti $(x, 0)$ con $x \neq 0$. Quindi i punti cirtici coincidono con l' asse y. Per studiarne la natura prima analizziamo $(0,0)$. In un intorno di $(0,0)$ basta prendere le restrizioni su $y = x$ e $y = -x$ e dedurre che si tratta di una sella. Per i punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ basta prendere la restrizione su (x, y_0) ed osservare che il segno di f e' dato da x^3y_0 che assume sia valori negativi che positivi in un intorno di $x = 0$. Quindi tutti i punti critici sono di sella. In particolare la funzione non ammette max e min assoluti, che altrimenti dovrebbero anche essere di max e min locali (ma tali punti non esistono).

Esercizio 3

Il dominio Ω e' il seguente:

$$\{(x, y, z) | (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9, x \geq 0\}$$

quindi l' integrale puo' essere calcolato come segue per sezioni

$$\int_0^2 dx\left(\int_{\Omega_x} (x^2 + y^3)dydz\right)$$

dove $\Omega_x = \{(y,z)|y^2+(z-2)^2 \leq 9-(x+1)^2\}$. Osserviamo che Ω_x e' simmetrico rispetto ad y mentre y^3 e' una funzione dispari, quindi

$$\int_{\Omega_x} y^3 dydz = 0$$

Pertanto l' integrale si riduce a

$$\int_0^2 dx\left(\int_{\Omega_x} (x^2 dydz)\right) = \int_0^2 x^2 \text{ area } (\Omega_x)dx = \pi \int_0^2 x^2(9-(x+1)^2)dx$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{9}{5}\pi$$

PARTE A

1. Sia $L : mat(n \times n) \to mat(n \times n)$ l' applicazione lineare tale che $L(A) = A - A^t$ dove A^t indica la trasposta di A. Allora $dim(kerL)$ vale

   A: $\frac{n(n+1)}{2}$ B: $n(n+1)$ C: $\frac{n(n-1)}{2}$ D: N.A. E: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

2. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq}4[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(p(x)) = p(x+1) - xp(x)$. Allora $dim(kerL)$ vale

   A: 3 B: N.A. C: 2 D: 1 E: 0

3. Siano
$$V = \{A \in Mat(2 \times 2) | A = \left[\begin{smallmatrix} a & a \\ b & b \end{smallmatrix}\right], a, b \in \mathbb{R}\}$$
   e
$$W = \{B \in Mat(2 \times 2) | B = \left[\begin{smallmatrix} c & d \\ c & d \end{smallmatrix}\right], c, d \in \mathbb{R}\}$$
   allora $dim(V + W)$ vale

   A: N.A. B: 2 C: 3 D: 4 E: 1

4. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] | p'(x) + p''(x) + p'''(x) + p''''(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: N.A. B: 4 C: 1 D: 0 E: 3

5. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(0) + p'(0) + p''(0) + p'''(0) = 0\}$ allora $dimV$ vale

   A: 2 B: N.A. C: 4 D: 1 E: 3

6. Sia A la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ Allora $detA$ vale

   A: -1 B: 2 C: 0 D: 1 E: N.A.

7. Siano
$$V_1 = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = 0\}, V_2 = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(2) = 0\}, V_3 = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(3) = 0\}.$$
   Allora $dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ vale

   A: 1 B: 3 C: N.A. D: 2 E: 4

8. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo $V_{x_0} = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[x] | p(x) = p(x + x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Allora $dimV_{x_0}$ vale

   A: 3 B: 6 C: 1 D: 4 E: N.A.

9. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l' applicazione lineare definita come segue sulla base canonica $e_1, \ldots, e_n$ $L(e_i) = e_{i-1}$ per $i = 2, \ldots, n$ ed $L(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ne_n$. Allora il determinante di L vale:

   A: $(-1)^n n$ B: $(-1)^n n!$ C: $(-1)^n n^2$ D: N.A. E: $(-1)^{n+1} n$

10. Lo spazio vettoriale
$$V = \{A \in Mat(3 \times 3) | \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 0\}$$
    dove a_{ij} indica l' elemnto della matrice A posto sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna, ha dimensione

    A: 8 B: 1 C: N.A. D: 6 E: 2

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

03 Febbraio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	X				
2					X
3			X		
4			X		
5					X
6	X				
7	X				
8			X		
9	X				
10	X				

CODICE=515573

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 03 Febbraio 2020

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1
Siano V e W due sottopsazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ cosi definiti:

$$V = span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \text{ e } W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x + y = t = 0 \}.$$

Calcolare $dimV$, $dimW$, $dim(V \cap W)$, $dim(V + W)$.

Esercizio 2
Sia data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \ni p(x) \to (x+1)p'(x) + p(2) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x].$$

Calcolare gli autovalori di L. Dire se L e' diagonalizzabile.

Esercizio 3
Sia data l' applicazione lineare

$$L : mat(2 \times 2) \ni A \to 2A + 3A^t \in mat(2 \times 2)$$

dove A^t indica la matrice trasposta.
Calcolare gli autovalori di L. Dire se L e' diagonalizzabile.

Sol. Esercizio 1

Lo spazio V ha dimensione 2. Lo spazio W e' formato dai vettori $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto ha dimensione 2. Lo spazio $V + W$ ha al massimo dimensione 3 poiche' $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' un generatore sia di V che di W. Scrivendo la matrice dei tre vettori rimanenti tra i generatori di V e W e calcolandone il rango si vede che $V + W$ ha dimensione 3. La dimensione di $V \cap W$ invece si trova con Grassman e vale 1.

Sol. Esercizio 2

La matrice associata ad L rispetto alla base canonica e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $(1, 1, 2, 8)$. Resta solo da apire la molteplicita' geometrica di 1 che si calcola come 4 meno il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Siccome il rango di quest matrice vale 3 abbiamo che la molteplicita' geometrica di 1 vale 1. Quindi L non e' diagonalizzabile.

Sol. Esercizio 3

La matrice associata ad L rispetto alla base canonica e'

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono quindi $(5, 5, 5, -1)$. Resta da capire la molteplicita' geometrica di 5 che vale 4 meno il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi ha rango 3. Pertanto risulta diagonalizzabile.