ESITI E VERBALIZZAZIONE
ANALISI II (BIOMEDICA)
22-FEB-2017

PER VERBALIZZARE IL VOTO E/O FARE L'ORALE PRESENTARSI LUNEDI 27 FEB. 2017 ORE 9.00 PRESSO LO STUDIO 210 AL DIP. DI MATEMATICA

SONO RIPORTATI I VOTI SUFFICIENTI:

1) CIAMPI 20
2) DE ANGELI 23
3) FABBRI 20
4) LANDI 18
5) PIZZUTO 20

[signature]

PARTE A

1. Il gradiente della funzione $f(x, y) = |x + \cos y|$ nel punto $(0,0)$ vale
   A: $(0,1)$ B: N.E. C: N.A. D: $(1,0)$ E: $(0,0)$

2. Sia data nel piano (x, z) la regione
   $$\Omega = \{(x, z)|x^2 + z^2 < (2\pi)^{2/3}, (x-1)^2 + z^2 > 1, x > 0\}$$
   Il volume della regione ottenuta ruotando Ω intorno all'asse z vale:
   A: $\frac{7}{2}\pi^2$ B: $\frac{6}{5}\pi^2$ C: $\frac{2}{3}\pi^2$ D: N.A. E: $\frac{5}{2}\pi^2$

3. Sia data nel piano (x, z) la regione
   $$\Omega = \{(x, z)|x > z, z < -x + 2, z > 0\}$$
   Il volume della regione ottenuta ruotando Ω intorno all' asse z vale:
   A: 2π B: 4π C: N.A. D: 5π E: 3π

4. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - \cos(xy)}{x^2+y^2}$ vale:
   A: 1 B: N.A. C: 0 D: $\frac{1}{2}$ E: -1

5. Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(x^2 \cos y)$. Allora il punto $(0,0)$ e':
   A: N.A. B: max relativo C: max assoluto D: min assoluto E: min relativo

6. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ vale
   A: N.A. B: $N.E.$ C: $+\infty$ D: $-\infty$ E: 1

7. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(1 + \ln(1 + (x + y)))$, allora $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)$ vale
   A: 2 B: N.A. C: 3 D: 5 E: 7

8. Il gradiente della funzione $f(x, y) = |\ln x| \ln y$ nel punto $(1/2, 1/2)$ vale
   A: $(2\ln 2, 2\ln 2)$
   B: N.E. C: $(-2\ln 2, 2\ln 2)$ D: N.A. E: $(-2\ln 2, -2\ln 2)$

9. Il seguente $\int\int\int_\Omega z^2 dxdydz$ dove
   $$\Omega = \{(x, y, z)|\max\{|x|, |y|, |z|\} < 1, x \cdot y > 0\}$$
   vale
   A: $1/4$ B: N.A. C: $1/3$ D: 1 E: $1/2$

10. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(|x|+|y|)^2}$ vale
    A: N.A. B: N.E. C: 1 D: 0 E: -1

CODICE=326685

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

22 Febbraio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E	
1				X		
2				X		
3	X					
4	X					
5	~~ ~~	~~X~~	~~ ~~	~~ ~~	~~ ~~	E
6		X				
7					X	
8	X					
9		X				
10		X				

CODICE=326685

SCRITTO ANALISI II (ING. BIOMEDICA)

22 FEBBRAIO 2017

1) Calcolare $\max\limits_{A} f$ e $\min\limits_{A} f$

dove $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{2} - y^2$

ed $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

2) Calcolare $\mathrm{Vol}(\Omega)$ dove

$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1, \; x^2+z^2 \leq 1\}$

3) Calcolare $\mathrm{Area}(\Sigma)$ dove

$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\} \cap \Omega$

ed

$\Omega = \{(x,y,z) \mid z > 0, \; x+y+z < 1\}$

2.2 La funzione $f(x,y)$ è regolare eccetto che in $(0,0)$

Quindi teniamo da parte il valore $\boxed{f(0,0)=0}$ per il confronto finale. Studiamo ora i punti interni eccetto $(0,0)$ e poniamo $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{2} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni mentre il secondo ha sol. $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ da cui

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} = \frac{8-2-3}{16} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

Resta il bordo:

$$f(\cos t, \sin t) = 1 - \frac{\cos t}{2} - \sin^2 t = g(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Allora si trova $g'(t) = 0 \iff \frac{\sin t}{2} - 2\sin t\cos t = 0$

$\iff \sin t = 0 \cup \cos t = \frac{1}{4}$

e in questi punti si trova

$$g(t) = \begin{cases} 1 \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases} \\ 1 - \frac{1}{8} - \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

Confrontando tutti i valori trovati si deduce

$$\max_A f = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \min_A f = -\frac{1}{16}$$

Es. 2

Lavorando per sezioni abbiamo

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{A_x} dy\,dz$$

dove $A_x = \{ (y,z) \mid y^2 \le 1-x^2,\ z^2 \le 1-x^2 \}$

$$\Rightarrow A_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \times [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

quindi

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\,dx = 8 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 8 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}.$$

Es. 3

Usiamo la parametrizzazione

$$\Omega \ni (\theta, z) \xrightarrow{\vec{\varphi}} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$$

con

$$\Omega = \{(\theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi], \ 0 < z < 1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\}$$

Con facili calcoli si trova

$$\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} \right\| = 1$$

quindi

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{\Omega} d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{(1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)} dz = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \, d\theta$$

$$= \boxed{2\pi}$$