ALG. LIN.

PARTE A

1. Il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 1 \\ 2y + z + w = 0 \\ 3x + 10z + w = 0 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

gode della seguente proprieta'

A: ha infinite sol. B: N.A. C: non ha sol. D: ha unica sol
E: ha esattamente 2 sol.

2. Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ tali che $dimV = 3, dim^{W} = 7$. Allora $d = dim(V \cap W)$ soddisfa necessariamente:

A: N.A. B: $d > 2$ C: $d < 3$ D: $2 \leq d \leq 3$ E: $d = 3$

3. Siano date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Allora $det(A \cdot B)$ vale

A: -6 B: 3 C: 6 D: -3 E: N.A.

4. Sia $W = span\{1, x + x^2, 1 + x + x^2, x^3 + x^4\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 4). Allora $dimW$ vale

A: 4 B: 3 C: 1 D: 2 E: N.A.

5. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ definito come segue $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. Il numero minimo di vettori che serve per completare $\mathcal{C}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ e'

A: 2 B: N.A. C: 0 D: 3 E: 1

6. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di k) l' applicazione lineare cosi' definita: $Lp(x) = x^2 \cdot p(x)$. Allora $dim(ImL)$ vale:

A: 4 B: N.A. C: 1 D: 2 E: 3

7. Sia $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tale che $L(e_1) = e_1$, $L(e_2) = -e_2$, $L(e_3) = e_4, L(e_4) = -e_3$ (dove e_1, e_2, e_3, e_4 e' la base canconica di $\mathbb{R}^4$). Gli autovalori di L sono:

A: $(1, -1, i, -i)$ B: N.A. C: $(1, -1, -i, -i)$ D: $(1, -1, 1, -1)$ E: $(1, 1, i, -i)$

8. Sia dato un endomorfismo $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(e_1 + e_2) = e_1 + e_2, L(e_1 - e_2 + e_3) = e_1 - e_2, L(e_3) = e_3$, (dove e_1, e_2, e_3 base canonica di $\mathbb{R}^3$). Allora gli autovalori di L sono

A: $(3, 3, 3)$ B: N.A. C: $(1/2, 1/2, 1/2)$ D: $(1, 1, 1)$ E: $(1, 1, 1/2)$

9. Siano V e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{10}$ tali che $dimV = 6$ e $dimW = 3$. Allora $d = dim(V + W)$ soddisfa necessariamente:

A: $d = 6$ B: $6 \leq d \leq 9$ C: N.A. D: $d = 9$ E: $d < 6$

10. Gli autovalori della seguente matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sono

A: N.A. B: $(0, 1)$ C: $(1, 3)$ D: $(0, 3)$ E: $(1, 1)$

CODICE=688029

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

21 Febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1				X	
2				X	
3			X		
4		X			
5					X
6					X
7	X				
8				X	
9		X			
10			X		

CODICE=688029

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 21 Febbraio 2018

Cognome:__________________________________ ,
Nome:_____________________________________

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Sia dato il seguente sottoinsieme delle matrici $Mat(n \times n)$:

$$\mathcal{A} = \{A \in Mat(n \times n) | A = -A^t\}$$

dove A^t indica la matrice trasposta. Dire se $\mathcal{A}$ e' un sottopazio vettoriale; in caso affermativo, calcolare la dimensione di $\mathcal{A}$.

Esercizio 2
Sia dato l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \{1, x + \alpha x^2, x - x^2 + x^3, x^3\}$. Dire per quali valori di α si ha che $\mathcal{B}_\alpha$ e' una base dei polinomi di grado minore o uguale a tre $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Esercizio 3
Sia dato il seguente sistema dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + ky + kz = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette rispettivamente: soluzione unica, infinite soluzioni, nessuna soluzione.

SOLUZIONI ALG. LIN.

Es. 1 La condizione di appartenenza ad $\mathcal{A}$ si esprime come segue:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j \in 1, \dots, n$$

dove a_{ij} sono le entrate della matrice A nella riga i-esima e la colonna j-esima. Da ciò si deduce facilmente che se

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{A} \quad e \quad B = (b_{ij}) \in \mathcal{A}$$

$$\Longrightarrow (A+B) = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{A} \quad \text{poiché}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(a_{ji} + b_{ji}).$$

Similmente se $a_{ij} = -a_{ji}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $\lambda a_{ij} = -\lambda a_{ji} \Longrightarrow \lambda A \in \mathcal{A}$.

Per calcolare la dim. osserviamo che siccome $a_{ij} = -a_{ji}$ allora $a_{KK} = 0$ $\forall K$. Quindi la diagonale è nulla. Inoltre una volta definito a_{ij} con $i < j$ allora resta univocamente definito $a_{ji} = -a_{ij}$. Quindi le matrici in $\mathcal{A}$ sono univocamente definite una volta fissati i valori sulla sopra diagonale. Quindi $\dim \mathcal{A}$ = numero termini nella sopra diagonale

$$= 1 + 2 + \dots + n-1 = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Es. 2 Sia $\{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.
Allora la matrice che rappresenta B_2 rispetto a tale base è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da lezione sappiamo che B_2 è una base $\Leftrightarrow$ rango della matrice è 4 $\Leftrightarrow$ det matrice $\neq 0$
$\Leftrightarrow (-1-\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$.

Es. 3 Se la matrice dei coeff. ha det $\neq 0$ allora la sol. esiste unica.
Calcoliamo quindi

$$\det \begin{pmatrix} K & K & K \\ 1 & 1 & K \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3K + K^2 + 2K - K - 2K^2 - 3K = -K^2 + K$$

Quindi se $K \neq 0, 1$ allora $\exists!$ unica sol.
Studiamo quindi $K=0$ e $K=1$
Se $K=0$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 0 = 4 \\ x+y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile.}$$

Se $K=1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+y+z = 4 \\ x+y+z = 1 \\ x+2y+3z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente le prime due eq. sono incompatibili quindi anche in questo caso è impossibile

北大理学部数学教室

ANALISI II

PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin(\pi - \cos(xy) + 1)$, allora il punto $(0,0)$ e' un punto di

   A: sella   B: N.A.   C: max assoluto   D: min relativo   E: max ~~assoluto~~ rel. ma non ~~relativo~~ assoluto

2. Il volume di Ω dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le |x|+|y|\}$ vale

   A: $\frac{4}{3}$ B: $\frac{8}{3}$ C: $\frac{5}{3}$ D: N.A.   E: $\frac{1}{3}$

3. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)-xy}{x^2+y^2}$ vale

   A: N.A.   B: 1   C: -1 D: N.E.   E: 0

4. Il gradiente della funzione $f(x,y) = e^{||x|^2+|\sin y||}$ nel punto $(0,0)$ vale

   A: $(0,0)$ B: $(0,1)$ C: N.A.   D: $(1,0)$ E: N.E.

5. L' area di Ω dove
$$\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 > \frac{1}{2}, \max\{x^2,y^2\} \le \frac{1}{2}\}$$
   vale:

   A: N.A.   B: $2-\frac{\pi}{2}$ C: $1-\frac{\pi}{2}$ D: $4-\frac{\pi}{2}$ E: $6-\frac{\pi}{2}$

6. Sia data la funzione
$$f(x,y) = \sin(x+y) - e^{x+y} + \cos(x+y)$$
   allora
$$\frac{\partial^8 f}{\partial_x^4 \partial_y^4}(0,0)$$
   vale:

   A: N.A.   B: 3   C: 0   D: 1   E: 2

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{x^6+y^6}$ vale

   A: N.A.   B: N.E.   C: 0   D: 1   E: -1

8. Sia data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{|x||y|}-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Allora f in $(0,0)$ gode della seguente proprieta':

   A: non e' continua   B: e' continua ma non differenziabile   C: N.A.   D: non ha gradiente
   E: e' continua e differenziabile

9. Il volume di Ω,dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1, x+2y+3z > 0\}$, vale

   A: N.A.   B: $\frac{1}{3}\pi$ C: $\frac{4}{3}\pi$ D: π E: $\frac{2}{3}\pi$

10. Il seguente integrale $\int\int_\Omega \max\{|x|,|y|\}dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x,y)| \max\{|x|,|y|\} \le 1\}$$
    vale

    A: $\frac{8}{3}$ B: N.A.   C: 6   D: 8   E: 2

CODICE=141204

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

21 Febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1			X		
2		X			
3				X	
4					X
5		X			
6			X		
7		X			
8					X
9					X
10	X				

CODICE=141204

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 21 Febbraio 2018

Cognome:____________________________________ ,
Nome:_______________________________________

Matricola:____________________________

Esercizio 1
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^3y^3)-\sin(x^3y^3)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

al variare di $\alpha > 0$.
Esercizio 2
Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_\Omega (x^2+y^2)dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2-2y>0, x^2+y^2-4y<0\}$
Esercizio 3
Calcolare l'integrale di superficie seguente:

$$\int_\Sigma \vec{F}\cdot \nu_{ext} dS$$

dove $\vec{F}(x,y,z) = (2x-y, y^2, z-x)$, $\Sigma = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ e ν_{ext} indica la normale esterna a Σ.

Es. 1 Sviluppando con Taylor il numeratore si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\frac{1}{2}x^6y^6+\frac{1}{6}x^9y^9}{(x^2+y^2)^{\alpha}} + \frac{o\left(\|x,y\|^{12}\right)}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\frac{1}{2}x^6y^6\left(1-\frac{1}{3}x^3y^3\right)}{(x^2+y^2)^{\alpha}} + \frac{o\left(\|x,y\|^{12}\right)}{(x^2+y^2)^{\alpha}}.$$

Da ciò deduciamo facilmente che il limite $\nexists$ se $\alpha=6$ e il limite vale 0 se $0<\alpha<6$.

Nel caso in cui $\alpha>6$ vogliamo provare che $\nexists$ lim. A tal fine osserviamo che se ci restringiamo negli assi $x=0=y$ allora

$$\frac{-\operatorname{sen}(x^3y^3)+\ln(1+x^3y^3)}{(x^2+y^2)^{\alpha}}=0$$ e quindi

un candidato limite è lo 0.

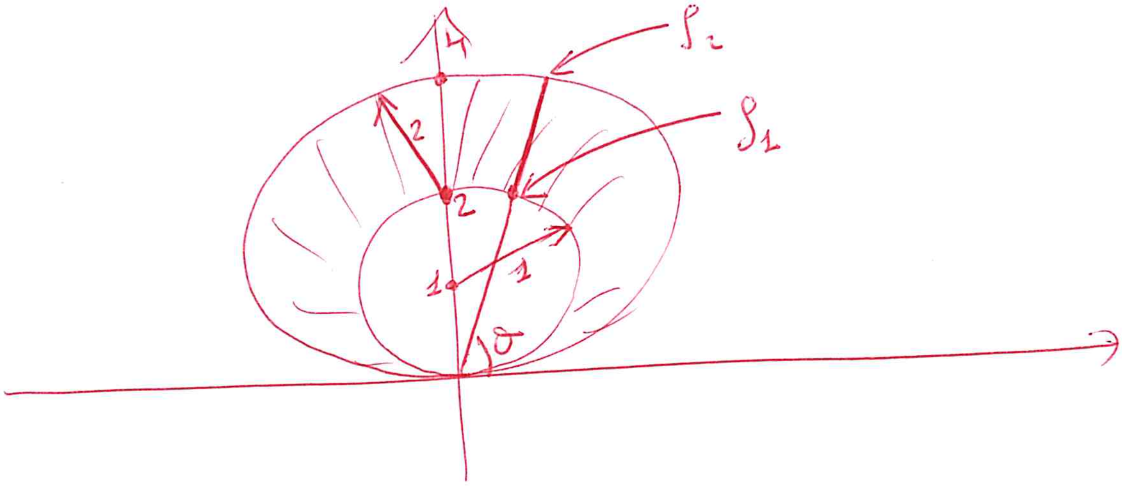
Dico però che se ci restringiamo alla bisettrice $y=x$ allora siamo ricondotti al limite

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t^6)-\operatorname{sen}t^6}{2^{\alpha}t^{2\alpha}}$$ e se $\alpha>6$ questo

limite vale $-\infty$, come si può provare sviluppando con Taylor il numeratore un numero sufficientemente alto di volte in modo che il resto sia $o(t^{2\alpha})$.

北大理学部数学教室

Es. 2 Osserviamo che Ω può essere rappresentato graficamente come segue



Descriviamo in polari Ω, quindi a θ fissato calcoliamo $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$ t.c.

$(\rho_1 \cos\theta, \rho_1 \operatorname{sen}\theta)$ appartiene alla circonferenza $\{x^2+y^2-2y=0\}$
$(\rho_2 \cos\theta, \rho_2 \operatorname{sen}\theta)$ " " $\{x^2+y^2-4y=0\}$.

Allora con semplici conti si trova

$$\rho_1 = 2 \operatorname{sen}\theta, \quad \rho_2 = 4 \operatorname{sen}\theta.$$

Quindi $\Omega = \{(\rho, \theta) \mid 0 \le \theta \le \pi, \ 2\operatorname{sen}\theta \le \rho \le 4\operatorname{sen}\theta\}$.

Passando alle polari l'integrale diventa

$$\int_0^\pi \left(\int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4\operatorname{sen}\theta} \rho^3 \, d\rho \right) d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4} \left[\rho^4\right]_{2\operatorname{sen}\theta}^{4\operatorname{sen}\theta} = 60 \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^4 \, d\theta$$

$$= 60 \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta (1 - \cos^2\theta) \right] = 60 \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta - \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \right]$$

$$= \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \operatorname{sen}(2\theta)^2 \, d\theta \right] = \boxed{\frac{45}{2} \pi}$$

Es. 3 Usando il teo. della divergenza basta calcolare

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} (3+2y) \, dx\,dy\,dz ,$$

dove $\Omega = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$.
Per disparità ritorna

$\iiint_{\Omega} 2y \, dx\,dy\,dz = 0$ e quindi resta

$$\iiint_{\Omega} 3 \, dx\,dy\,dz = 3 \operatorname{Vol}(\Omega) = \boxed{4\pi}.$$