Es. 1

Si ha $F(0,0,1) = \int_0^1 dt - 1 = 0$.

Inoltre

$$F_z = e^{-yz^2}, \quad F_x = -e^{-yx^2}, \quad F_y = -\int_x^z t^2 e^{-yt^2} dt$$

$\Rightarrow F_z(0,0,1) = \boxed{1} \neq 0$. Siamo quindi nelle ipotesi della funzione implicita.

Per calcolare il piano tangente al grafico di φ calcoliamo $\varphi_x(0,0)$ e $\varphi_y(0,0)$.

Abbiamo $\varphi_x(0,0) = -\dfrac{F_x(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = -\dfrac{-1}{1} = \boxed{1}$

e $\varphi_y(0,0) = -\dfrac{F_y(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = -\dfrac{-\int_0^1 t^2 dt}{1} = \boxed{\frac{1}{3}}$

pertanto l'eq. del piano tangente è:

$$z = 1 + \varphi_x(0,0)x + \varphi_y(0,0)y \Rightarrow \boxed{z = 1 + x + \frac{1}{3}y}.$$

Per calcolare l'Hessiano di φ ossia $\varphi_{xx}(0,0), \varphi_{yy}(0,0), \varphi_{xy}(0,0)$ calcoliamo preventivamente:

$$F_{xx} = 2yx\, e^{-yx^2} \Rightarrow F_{xx}(0,0,1) = \boxed{0}$$

$$F_{yy} = +\int_x^z t^4 e^{-yt^2} dt \Rightarrow F_{yy}(0,0,1) = \int_0^1 t^4 dt = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$\cancel{F_{zz} = z^2 e^{-yz^2} \Rightarrow F_{zz}(0,0,1) = \boxed{-1}}$$

$$F_{zz} = -2yz\, e^{-yz^2} \Rightarrow F_{zz}(0,0,1) = \boxed{0}$$

$$F_{xy} = x^2 e^{-yx^2} \Rightarrow F_{xy}(0,0,1) = \boxed{0}$$

$$F_{xz} = 0 \Rightarrow F_{xz}(0,0,1) = \boxed{0}$$

$$F_{yz} = -z^2 e^{-yz^2} \Rightarrow F_{yz}(0,0,1) = \boxed{-1}$$

Allora troviamo dalla relazione $F(x,y,\varphi(x,y))=0$

$F_x + F_z \varphi_x = 0 \implies \boxed{F_{xx} + F_{xz}\varphi_x + F_{xz}\varphi_x + F_{zz}\varphi_x^2 + F_z \varphi_{xx} = 0}$

$F_y + F_z \varphi_y = 0 \implies \boxed{F_{yy} + F_{yz}\varphi_y + F_{zy}\varphi_y + F_{zz}\varphi_y^2 + F_z \varphi_{yy} = 0}$

Inoltre da $F_x + F_z \varphi_x = 0$ ritrova

$$\boxed{F_{xy} + F_{xz}\varphi_y + \varphi_x\left(F_{zy} + F_{zz}\varphi_y\right) + F_z \varphi_{xy} = 0}$$

Dalle relazioni precedenti si trova:

$$\boxed{\varphi_{xx}(0,0) = 0}$$

$$\boxed{\varphi_{yy}(0,0)} = -\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(0,0)} = -1\cdot(-1+0) = \boxed{1}.$$

Es 2

Ricordiamo che il piano tangente ad una superficie definita implicitamente $\{F(x,y,z)=0\}$ nel punto (x_0,y_0,z_0) si ottiene calcolando $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \vec{v}$ e scrivendo il piano

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z = d \quad \text{con } d = v_1 x_0 + v_2 y_0 + v_3 z_0 \text{ dove}$$

$(v_1, v_2, v_3) = \vec{v}$.

Quindi nel nostro caso

$-2x-2y-2z=d$ con $d=0$ (visto che imponiamo che il piano passi per $(0,0,0)$).

Pertanto il piano Π ha eq. $\boxed{x+y+z=0}$.

È quindi chiaro che $\Sigma_+ = \{(x,y,z) \mid x+y+z < 0\}$.

Pertanto

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ z < -x-y\}$$

e quindi integrando per sezioni

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \leq 0}} dx\,dy \int_0^{-x-y} dz = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \leq 0}} (-x-y)\,dx\,dy =$$

polari

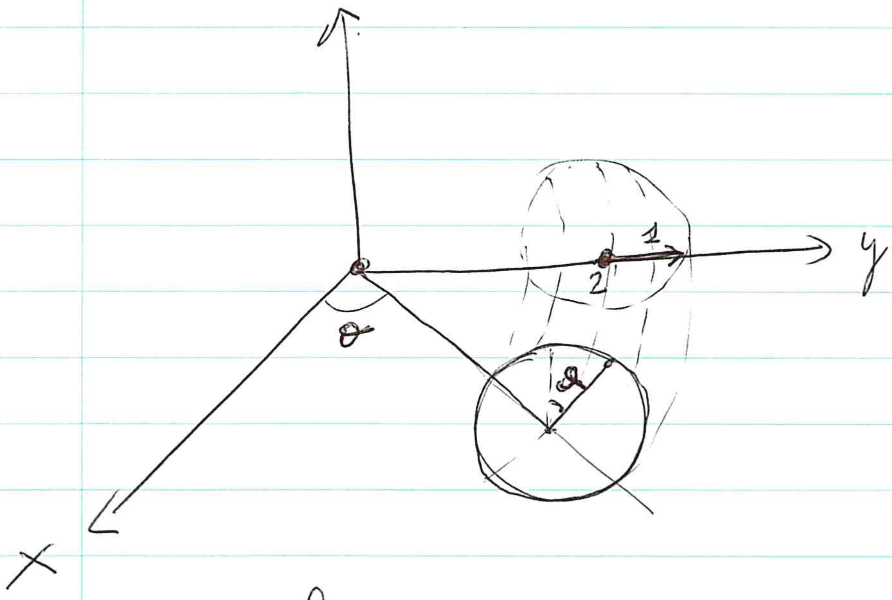
$$= -\int_{3/4\pi}^{7/4\pi} \int_0^1 d\rho\, d\alpha\, (\rho\cos\alpha + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha) = -\frac{1}{2} \int_{3/4\pi}^{7/4\pi} (\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)\, d\alpha$$

$$= -\frac{1}{4} \Big[+\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha\Big]_{3/4\pi}^{7/4\pi} = -\frac{1}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Es 3

Usando gli angoli (θ, φ) come in figura parametrizziamo Σ



$$(\theta,\varphi) \xrightarrow{\varphi} \left((2+\cos\varphi)\cos\theta,\ (2+\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\right)$$

con $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$

Quindi scriviamo la matrice Jacobiana di φ e troviamo

$$J\varphi = \begin{pmatrix} -(2+\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ (2+\cos\varphi)\cos\theta & -2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

quindi detti M_1, M_2, M_3 i tre minori 2×2 si ha

$$\cancel{\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, d\varphi \left(\sqrt{2\operatorname{sen}\varphi(2+\cos\varphi)\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\varphi(2+\cos\varphi}\right.}$$

$$\det M_1 = (2+\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\det M_2 = -(2+\cos\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\theta$$

$$\det M_3 = (2+\cos\varphi)\cos\theta\cos\varphi$$

Quick:

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\det M_1)^2 + (\det M_2)^2 + (\det M_3)^2}\; d\alpha\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2+\cos\varphi)\, d\alpha\, d\varphi = 2\pi \left[2\varphi + \sin\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi \cdot 4\pi = \boxed{8\pi^2}.$$