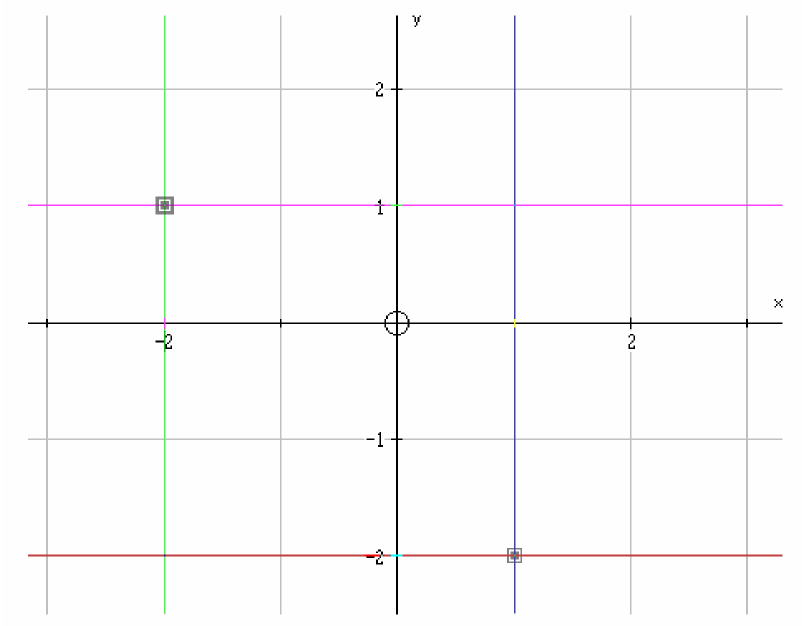
0. Piano cartesiano[1]

Per piano cartesiano si intende un piano dotato di due assi (che per ragioni pratiche possiamo scegliere ortogonali). Il punto in comune ai due assi è detto origine, e funziona da origine per entrambi. Ciascuno dei due assi è dotato di un'unità di misura (non necessariamente la stessa). Una volta che ciascun asse è dotato di origine, di unità di misura e uno dei suoi versi è scelto convenzionalmente come positivo, ogni suo punto può essere associato a uno e un solo numero reale. Se si tracciano da un punto qualunque del piano le perpendicolari agli assi coordinati, i numeri associati alle intersezioni delle perpendicolari con gli assi coordinati sono le coordinate del punto.

Ogni punto del piano cartesiano può quindi essere rappresentabile come coppia ordinata di numeri reali. Per questo nelle formule i punti del piano vengono identificati con coppie di numeri reali, e il piano cartesiano viene denotato P^2.

Esempi

- La coppia (1, –2) rappresenta il punto di ascissa 1 e ordinata –2.
- La coppia (–2, 1) rappresenta il punto di ascissa –2 e ordinata 1.

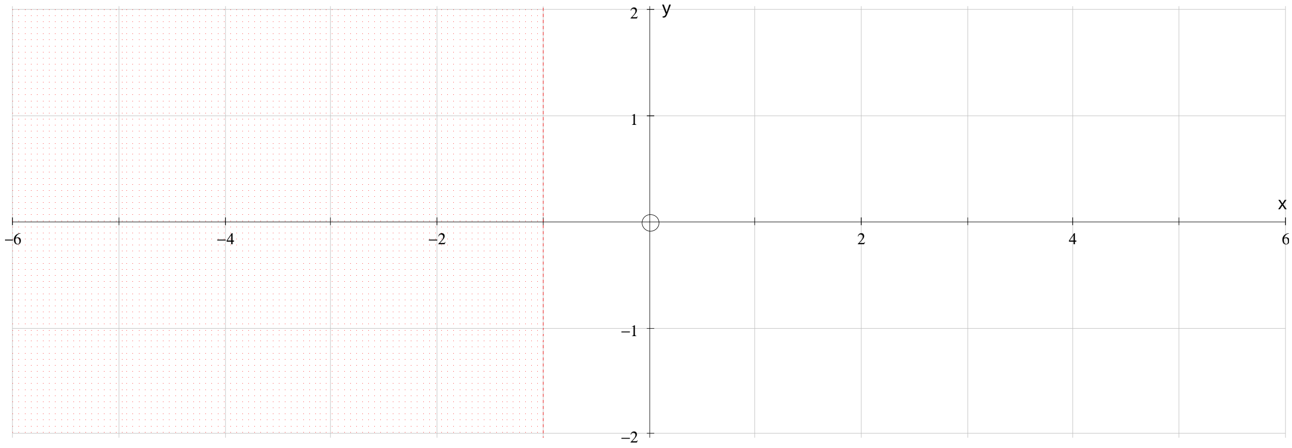


La figura a sinistra rappresenta una porzione di piano cartesiano in coordinate isometriche. Sono evidenziati i punti ((1,–2) e (–2,1) e le relative perpendicolari agli assi coordinati.

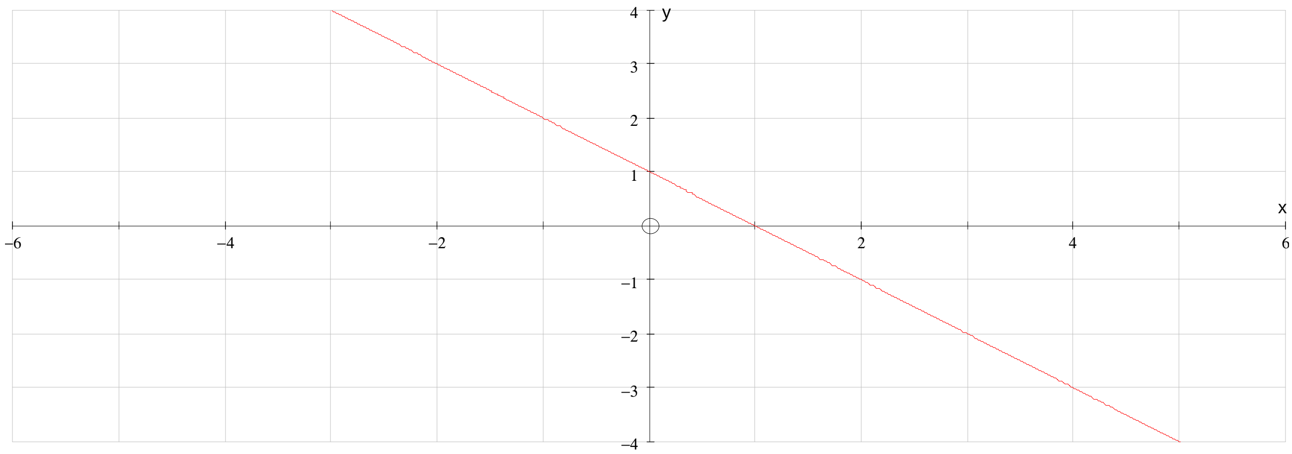
La corrispondenza fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali consente di rappresentare sottoinsiemi del piano attraverso relazioni numeriche.

Nella figura che segue è rappresentato (attraverso la punteggiatura) l'insieme dei punti del piano la cui ascissa è minore di –1. In formula: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < -1\}$

[1] Appunti di P. L. Ferrari dell'Università del Piemonte Orientale (sede di Alessandria).



Nella figura seguente è rappresentato, in coordinate non isometriche, l'insieme dei punti le cui coordinate *x*, *y* verificano la relazione *x*+*y*=1. In formula: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$



0.1. Rette

Le rette del piano cartesiano sono rappresentabili mediante equazioni. Due sono le forme più usate:

y=*mx*+*n*	(forma esplicita) le rette verticali, cioè parallele all'asse delle ordinate non sono rappresentabili in questa forma;
ax+*by*+*c*=0	(forma implicita) tutte le rette del piano sono rappresentabili in questa forma.

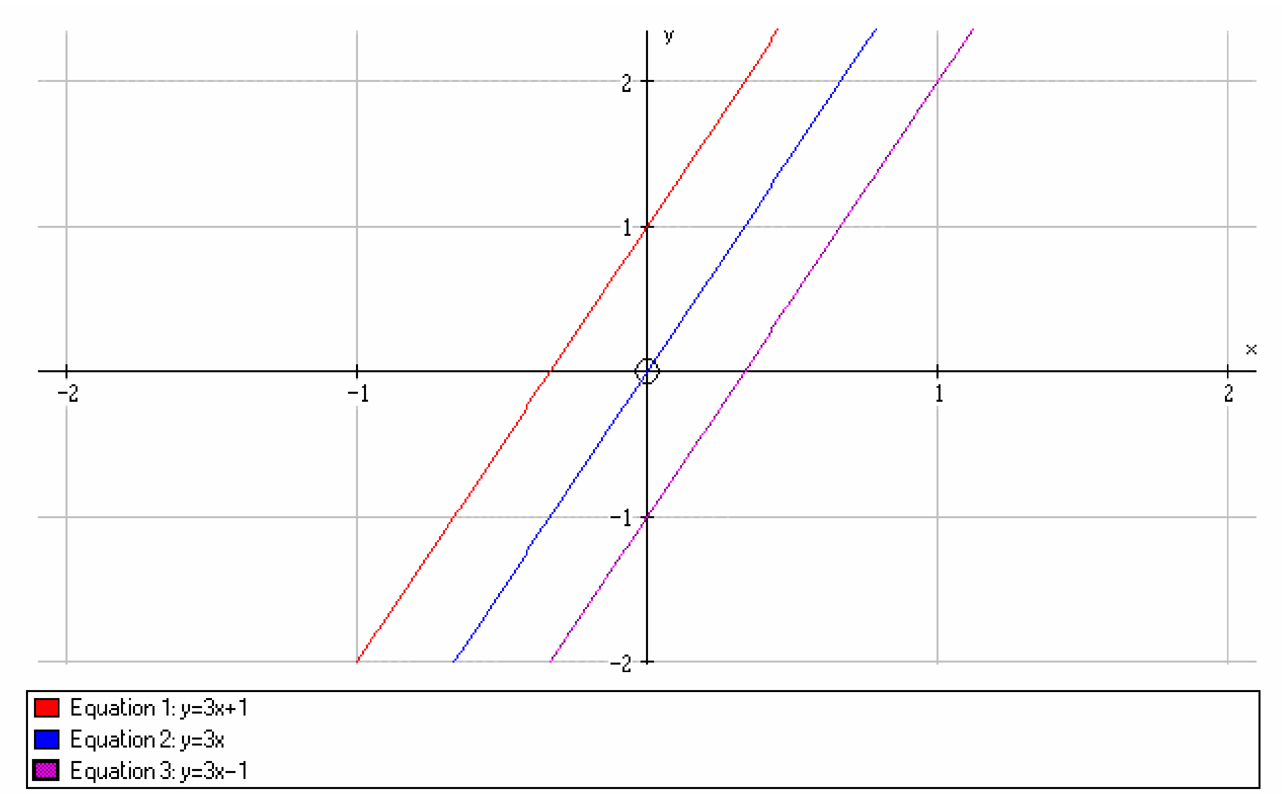
Esempi

- Consideriamo la retta di equazione *y*=2*x*–3.
  - È vero che il punto (2, 3) sta sulla retta? No, perché se si sostituiscono il valore 2 a *x* e il valore 3 a *y* la relazione non è verificata.
  - È vero che il punto (7, 11) sta sulla retta? Sì, perché se si sostituiscono il valore 7 a *x* e il valore 11 a *y* la relazione è verificata.
- Consideriamo la retta di equazione *x*+3*y*–5=0.
  - È vero che il punto (8, –1) sta sulla retta? Sì, perché se si sostituiscono il valore 8 a *x* e il valore –1 a *y* la relazione è verificata.
  - È vero che il punto (–1, 8) sta sulla retta? No, perché se si sostituiscono il valore –1 a *x* e il valore 8 a *y* la relazione non è verificata.
  - È vero che il punto (0, 0) sta sulla retta? No, perché se si sostituiscono il valore 0 a *x* e il valore 0 a *y* la relazione non è verificata.
- La retta di equazione *y*=2*x*–3 può essere rappresentata dall'equazione equivalente in forma implicita 2*x*–*y*–3=0.

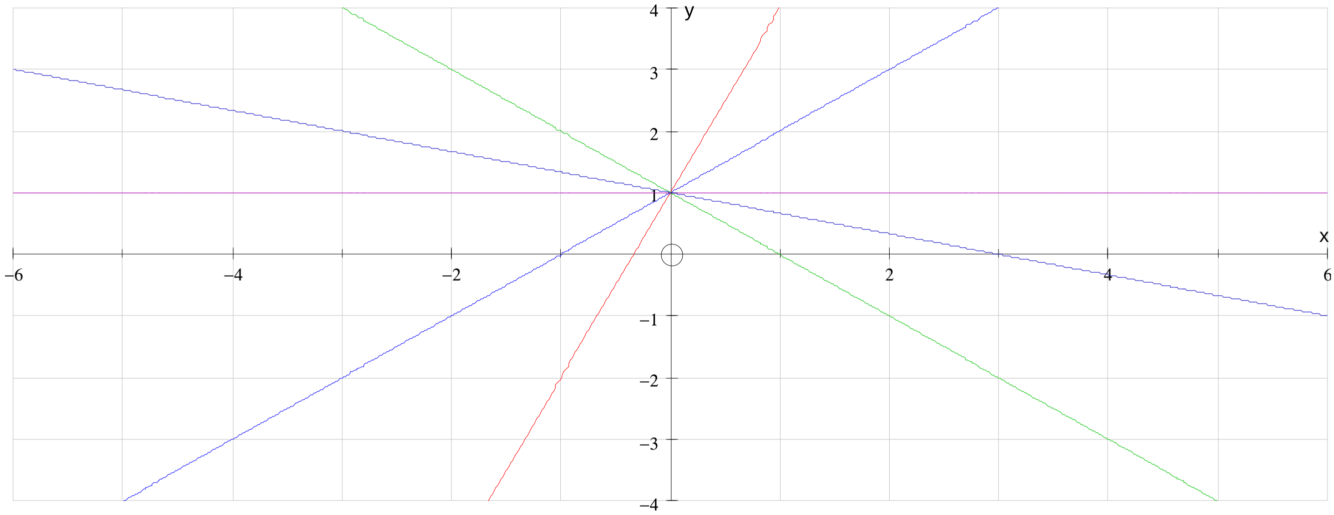
- La retta di equazione $x+3y–5=0$ può essere rappresentata dall’equazione equivalente in forma esplicita $y=-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$.

Significato dei parametri
Consideriamo una retta di equazione $y=mx+n$.

- Che cosa succede se m rimane costante e n viene fatto variare? Il diagramma che segue mostra alcuni casi.



- Che cosa succede se n rimane costante e m viene fatto variare? Di seguito vediamo i grafici delle rette di equazione $y=mx+1$ per $m=3$, $m=1$, $m=0$, $m=–1$, $m=-\frac{1}{3}$.



Il parametro m è chiamato anche *coefficiente angolare* e determina la pendenza della retta.

Il parametro n determina l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse delle y (cioè, in corrispondenza di x=0). Il punto in cui la retta taglia l'asse delle x (cioè, per y=0) ha come ascissa $-\frac{n}{m}$.

Data una retta (che non sia verticale) la sua rappresentazione nella forma $y=mx+n$ è univocamente determinata. In altri termini, data una retta non verticale, esistono unici m, n ($m,n \in$ P) tali che l'equazione $y=mx+n$ rappresenta la retta.
Data una retta qualunque, la sua rappresentazione nella forma $ax+by+c=0$ non è univocamente determinata. I parametri a, b, c sono determinati a meno di un coefficiente moltiplicativo. Quindi al variare di k ($k\in$ P*) tutte le equazioni della forma $kax+ kby+ kc = 0$ rappresentano la stessa retta.

Esempio
Le equazioni $4x–0.5y+1=0$ e $–4x+0.5y–1=0$ rappresentano la stessa retta. Per verificarlo basta osservare che la seconda equazione si può riscrivere come $–(4x–0.5y+1)=0$ e che quindi ha evidentemente le stesse soluzioni della prima, oppure scegliere 2 punti che soddisfano la prima equazione (ad esempio, (0,2) e (1, –4)) e verificare che soddisfano anche la seconda. Infatti, date due rette del piano, esistono solo tre possibilità:

- non hanno punti in comune (rette parallele non coincidenti);
- hanno un solo punto in comune (rette incidenti);
- sono la stessa retta (rette coincidenti).

Quindi se due rette hanno almeno 2 punti in comune, allora coincidono.

0.2. Parallelismo
Da quanto osservato nella sezione precedente, segue che 2 rette sono parallele se hanno la stessa pendenza.

Esempio
Le rette di equazione rispettivamente $y = –2x–1$, $x+0.5y+3 = 0$, $2x+y–p = 0$
sono parallele (per ogni valore reale di p). Il coefficiente angolare della prima è –2, come pure quelli delle altre due.

0.3. Sistemi lineari
Abbiamo visto che un'equazione della forma $ax+by+c=0$, se a e b non sono entrambi nulli, è soddisfatta da infiniti punti del piano cartesiano. In altre parole l'equazione ha infinite soluzioni. Se cerchiamo i punti che soddisfano contemporaneamente due equazioni di quella forma, dobbiamo risolvere un *sistema lineare* di due equazioni in due incognite, usualmente rappresentato come segue

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Un problema di questo tipo equivale a cercare le intersezioni nel piano cartesiano fra le rette rappresentate dalle due equazioni. Da questo punto di vista ci sono tre possibilità:

- Le due equazioni rappresentano una sola retta: in tal caso il sistema ha infinite soluzioni. Esempio: il sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 6x + 9y - 3 = 0 \end{cases}$

- Le due rette sono distinte ma parallele: in tal caso il sistema non ha soluzioni. Esempio: il sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ 6x + 9y - 3 = 0 \end{cases}$
- Le due rette non sono parallele: in tal caso il sistema ha una sola soluzione. Esempio: il sistema $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 6x + 9y - 3 = 0 \end{cases}$

Per verificare se le due rette sono parallele, è sufficiente calcolare il loro coefficiente angolare. Quindi dato un generico sistema della forma $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ possono accadere tre cose:

- $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ e $-\frac{c}{b} = -\frac{c'}{b'}$: le equazioni rappresentano una sola retta.
- $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ e $-\frac{c}{b} \neq -\frac{c'}{b'}$: le equazioni rappresentano due rette distinte e parallele.
- $-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$: le equazioni rappresentano due rette non parallele.

Problemi

1) Trovate le intersezioni delle rette di equazione $3x–3y=1$ e $4x+2y=3$.
2) Trovate le intersezioni delle rette di equazione $4x–3y=15$ e $3x+2y=7$.
3) Trovate le intersezioni delle rette di equazione $3x–3y=1$ e $–6x+6y+2=0$.
4) Trovate le intersezioni delle rette di equazione $x–5y=1$ e $2x–1+y=3$.
5) Stabilite se il punto di coordinate $(–1, –2)$ appartiene alla retta di equazione $–2x+3y+4=0$.
6) Stabilite se il punto di coordinate $(–3, 2)$ appartiene alla retta di equazione $3x–4y–17=0$.
7) Scrivete l’equazione esplicita (rispetto alla y) della retta di equazione $7x+5y–2=0$.
8) Scrivete un’equazione implicita della retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$.
9) Stabilite se le rette di equazioni $y = \frac{3}{4}x+21$ e $3x+4y+84 = 0$ sono parallele.
10) Stabilite se le rette di equazioni $y = -\frac{3}{5}x+1$ e $9x+15y+1 = 0$ sono parallele.
11) Stabilite se il sistema $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ ha una, nessuna o infinite soluzioni. Nel caso ne abbia una determinatela.
12) Stabilite se il sistema $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ -4x + \frac{4}{3}y = \frac{4}{3} \end{cases}$ ha una, nessuna o infinite soluzioni. Nel caso ne abbia una determinatela.
13) Stabilite se il sistema $\begin{cases} -5x + 2y = 2 \\ -4x + \frac{8}{5}y = \frac{4}{5} \end{cases}$ ha una, nessuna o infinite soluzioni. Nel caso ne abbia una determinatela.

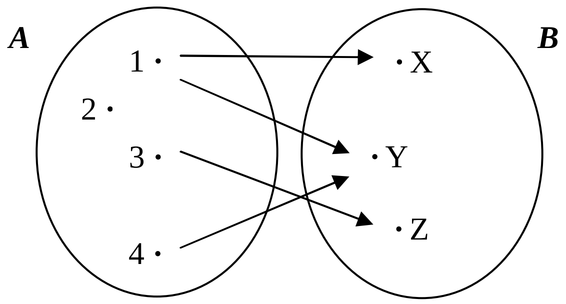
14) Stabilite se il sistema $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ -4x + 4y = 1 \end{cases}$ ha una, nessuna o infinite soluzioni. Nel caso ne abbia una determinatela.

1. Funzioni, formule e grafici. Polinomi e valore assoluto

1.1. Funzioni e grafici nella matematica

Dati due insiemi *A*, *B*, si ha una *corrispondenza* (o relazione binaria) da *A* a *B* quando esiste un criterio (una legge, una formula, una frase, un elenco di coppie ordinate) in base a cui elementi di *A* sono associati ad elementi di *B*. Se la corrispondenza è definita in modo tale che a **ogni** elemento di *A* è associato **uno e un solo** elemento di *B*, allora è detta *funzione*. In tal caso l'insieme *A* è detto *dominio* della funzione, l'insieme *B codominio*.

Esempi

- 

Il diagramma a sinistra rappresenta una corrispondenza tra due insiemi *A* e *B*. Gli elementi che si corrispondono sono collegati da una freccia. All'elemento 1 di *A* corrispondono gli elementi X e Y di *B*. A 2 non corrisponde alcun elemento di *B*. A 3 corrisponde Z e a 4 corrisponde Y. Questa corrispondenza non è una funzione perché a 1 corrispondono due elementi e anche perché a 2 non corrisponde alcun elemento.

- Una corrispondenza può essere definita anche da una formula in cui occorrano due lettere. Una delle lettere (in alcuni casi la *x*) assume i valori del dominio. Ad esempio, se *x*, *y* rappresentano numeri reali, la formula $2x-y+1=0$ definisce una corrispondenza fra numeri reali. In questo caso *A*=*B*=P. Due numeri sono in corrispondenza se una volta sostituiti nell'ordine a *x* e a *y* soddisfano l'equazione. Ad esempio, a 0 corrisponde 1 perché sostituendo 0 al posto di *x* e 1 al posto di *y* l'equazione è soddisfatta. Non è vero che a 1 corrisponda 0, perché sostituendo 1 a *x* e 0 a *y* l'equazione non è soddisfatta. Questa corrispondenza è anche una funzione perché fissato un qualunque *x* esiste comunque uno (e un solo) *y* che soddisfa l'equazione. Tale funzione è normalmente rappresentata dall'equazione (equivalente alla precedente) $y=2x+1$. La tabella che segue mostra alcuni esempi di coppie di valori corrispondenti.

x	0	–1	1	–2	2	3	4	5	0.1	0,2	$\sqrt{2}$	$0,\overline{3}$	10	100	1000
y	1	–1	3	–3	5	7	9	11	1.2	1.4	$2\sqrt{2}+1$	$1.\overline{6}$	21	201	2001

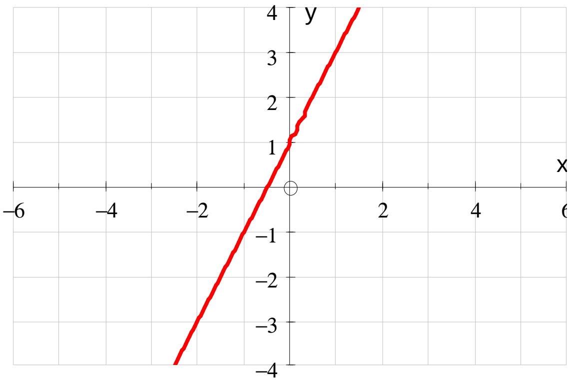
Per rappresentare efficacemente un insieme di dati con una tabella saranno comunque necessarie delle scelte relative alla loro precisione. Inoltre, dato che una tabella non può contenere che un numero finito di valori numerici, occorrerà decidere quale intervallo di valori della *x* rappresentare. Vediamo ancora due tabelle che rappresentano la stessa funzione definita sopra ma con diverse scelte in relazione all'ampiezza dell'intervallo rappresentato e alla distanza dei valori della *x*. La tabella che segue rappresenta la funzione tra 0.0 e 1.5, con il passo (cioè, la distanza fra due valori consecutivi della *x*) di 0.1.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0

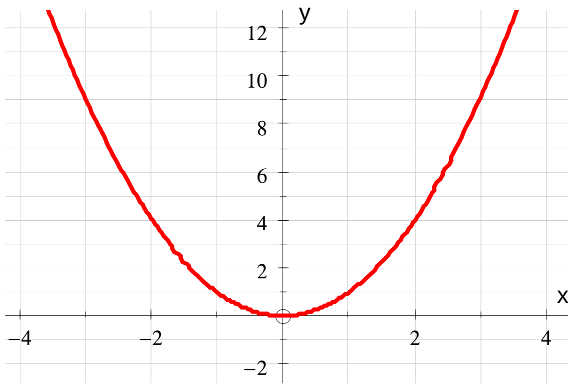
La tabella che segue rappresenta la stessa funzione tra 0.0 e 7.5 con il passo di 0.5.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
y	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0

In alcuni casi una corrispondenza (e quindi anche una funzione) può essere rappresentata da un grafico cartesiano. A lato è riportato un tratto del grafico della funzione definita sopra. Anche un grafico di questo tipo richiede scelte preliminari circa l'intervallo delle x da rappresentare (in questo caso, l'intervallo [–6,6]) e le unità di misura da adottare sugli assi coordinati.

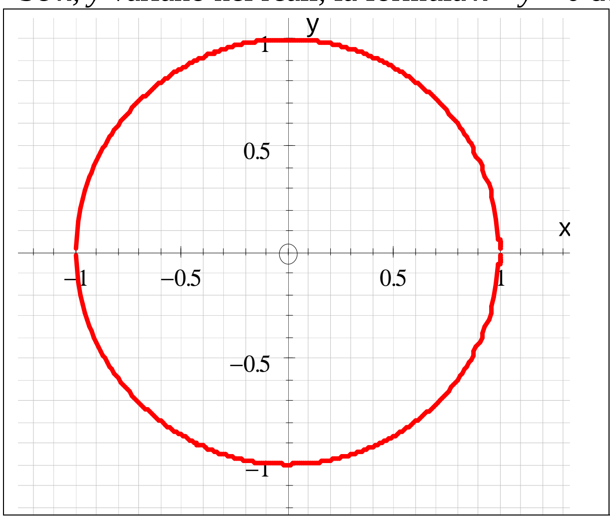


- Se x, y sono numeri reali, la formula $x^2-y=0$ definisce una corrispondenza fra numeri reali.



Tale corrispondenza è anche una funzione perché per ogni numero reale x esiste uno e un solo y tale da soddisfare l'equazione. Il fatto che a diversi valori di x (ad esempio, –2 e 2) possa corrispondere lo stesso valore di y (in questo caso 4) non viola la definizione di funzione. A lato è riportato un tratto del grafico della funzione.

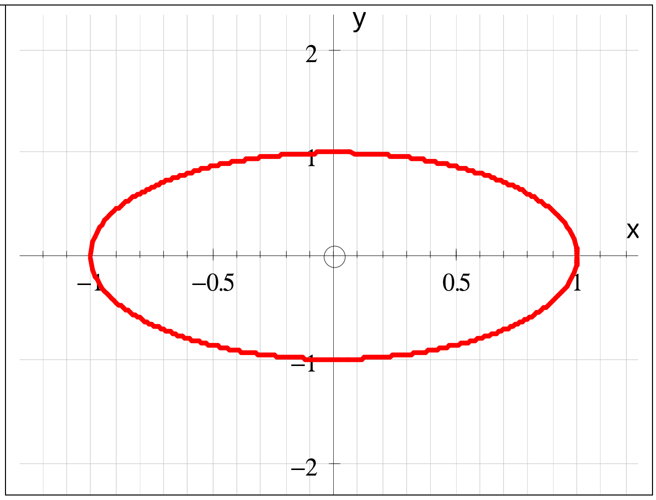
- Se x, y variano nei reali, la formula $x^2+y^2=0$ definisce una corrispondenza fra numeri reali.



Tale corrispondenza non è una funzione dai reali ai reali perché non è vero che per ogni x esiste esattamente un y che soddisfa l'equazione. Ad esempio, per x=2 non esiste nessun y che soddisfa l'equazione. Inoltre per alcuni valori di x esistono più valori di y che soddisfano l'equazione. Ad esempio, se x=0,5, esistono due valori di y che soddisfano l'equazione, e precisamente:

$$\left(y=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{e}\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

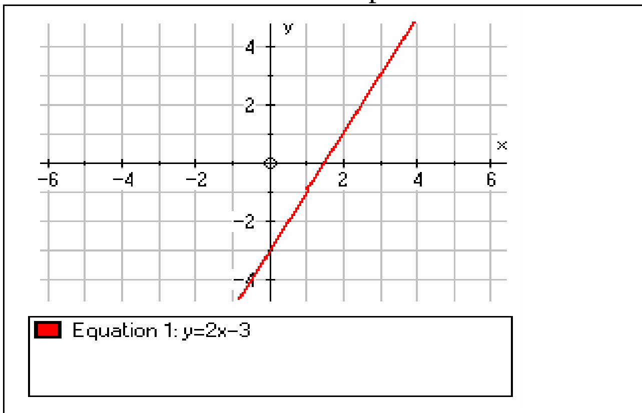
Nel disegno sopra sono state adottate coordinate isometriche (cioè, con la stessa unità di misura per i due assi coordinati). Per questo il grafico ha l'apparenza di una circonferenza. Nel disegno a destra sono state adottate le unità di misura di default del programma utilizzato (non isometriche!); per questo il grafico non ha l'aspetto di una circonferenza. La relazione è sempre la stessa!

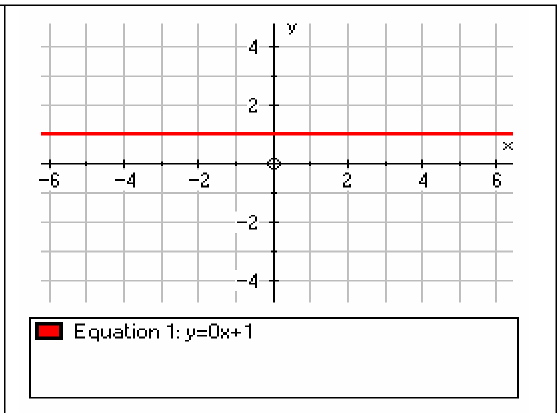


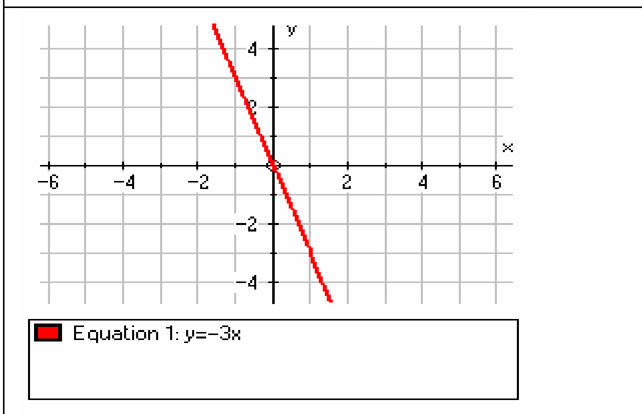
Nel seguito si scriverà $y=f(x)$ per affermare che y è l'elemento associato a x (o anche *immagine* di x) dalla funzione f. Per affermare che f è una funzione da A a B, si scriverà $f: A \to B$.

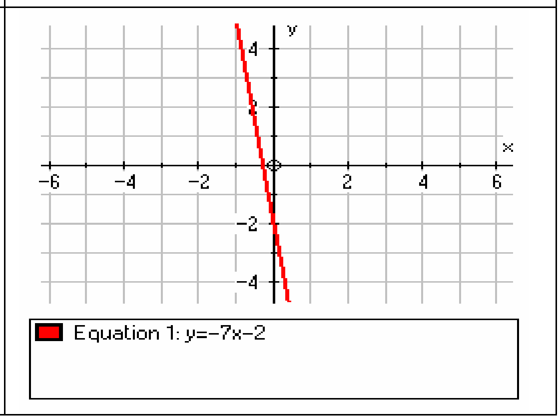
Altri esempi

- Per ogni m, n reali, un'equazione della forma $y=mx+n$ definisce una funzione dai reali ai reali. Vediamo alcuni esempi.

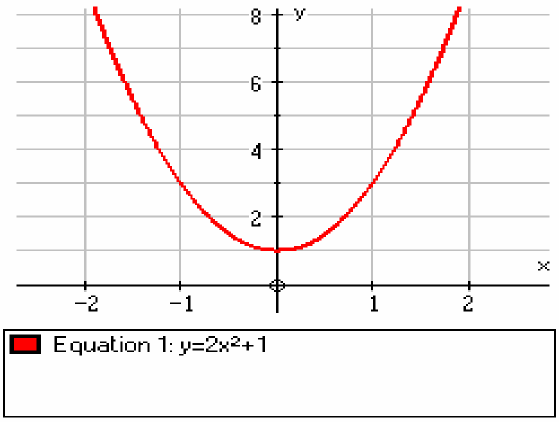


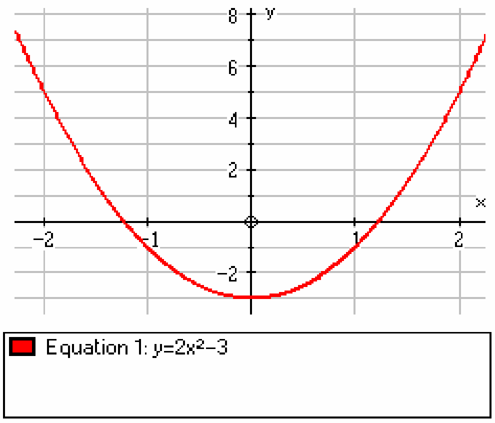


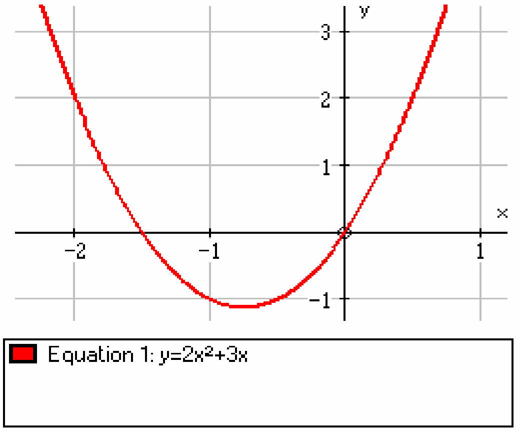


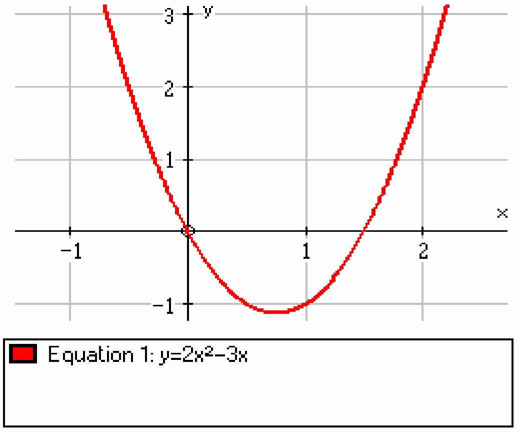


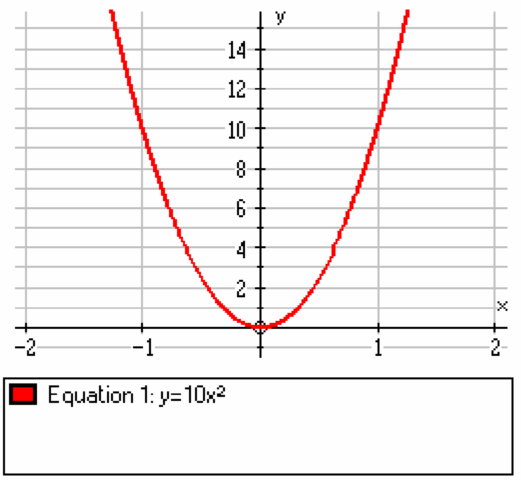
- Per ogni *a*, *b*, *c* reali, un'equazione della forma $y=ax^2+bx+c$ definisce una funzione dai reali ai reali. Vediamo alcuni esempi.

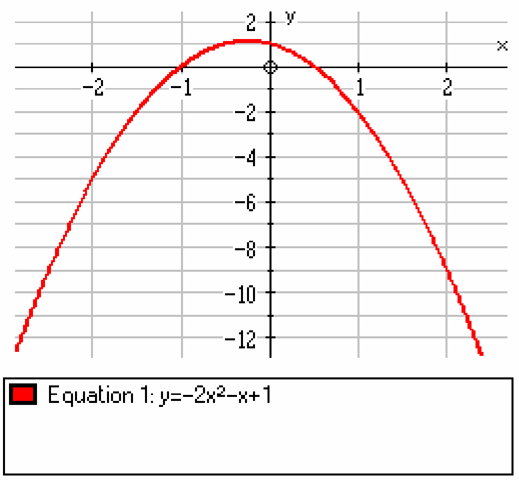




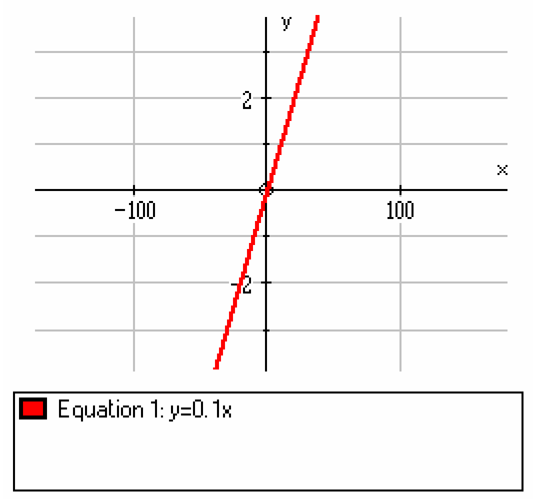


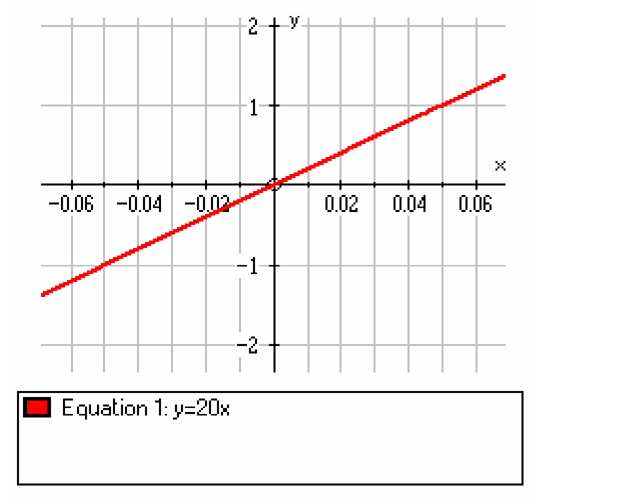






Attenzione!
Come già visto con la circonferenza, l'aspetto esteriore dei grafici non dipende solo dalla funzione rappresentata ma anche dalle unità di misura scelte sugli assi cartesiani. Nei due diagrammi che seguono vedete due esempi di quello che può capitare.





Quale fra le due rette disegnate sopra ha la pendenza maggiore?

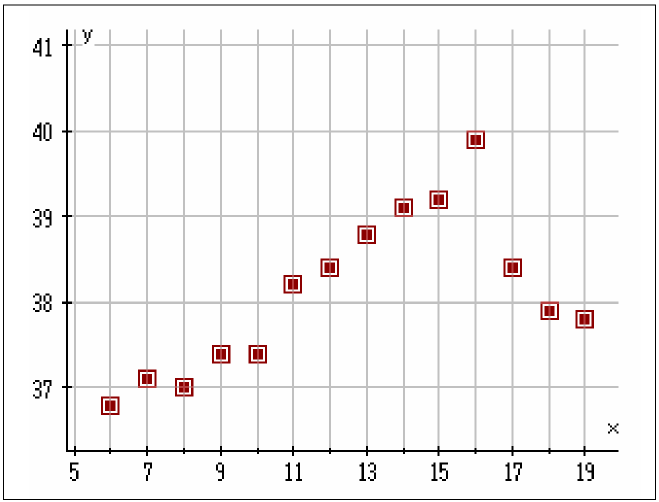
1.2. Funzioni e grafici per rappresentare dati sperimentali

Negli esempi precedenti abbiamo rappresentato alcune funzioni che erano definite in modo preciso attraverso formule. Una volta definita una funzione, diventa un esercizio matematico calcolarne i valori e le proprietà. Il fisico, il biologo, il chimico procedono nel modo opposto: partono da un insieme finito di dati sperimentali, come ad esempio una tabella che mette in corrispondenza due insiemidi grandezze. Spesso i dati non sono esatti ma approssimati, e non vi è una legge matematica semplice, esprimibile con una formula, che esprima in modo esatto la relazione fra le grandezze in gioco. Supponiamo di dover rilevare la temperatura di un malato. Supponiamo di aver già effettuato le seguenti rilevazioni dalla 6 del mattino alle 7 di sera, con cadenza oraria.

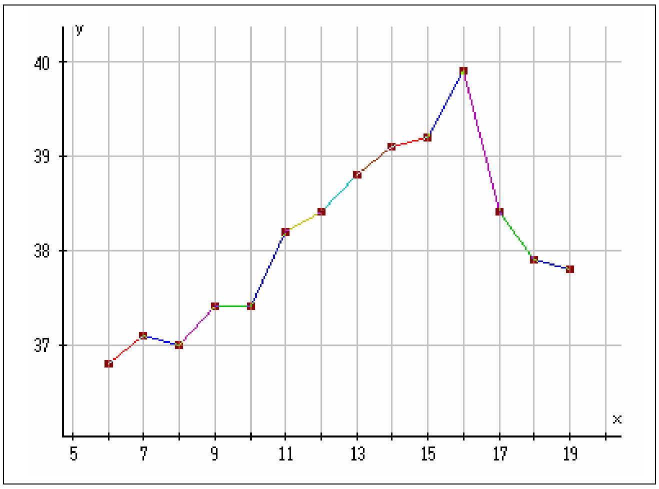
06	36.8
07	37.1
08	37.0
09	37.4
10	37.4
11	38.2
12	38.4

13	38.8
14	39.1
15	39.2
16	39.9
17	38.4
18	37.9
19	37.8

La misura avrà una precisione che spesso è necessario conoscere. Per interpretare meglio i dati spesso si utilizza una rappresentazione grafica, come quella di destra. La scelta dell'intervallo orario da rappresentare e delle unità di misura è stata fatta in modo da rendere massima la leggibilità del grafico. È anche possibile collegare i punti del grafico con segmenti. Rappresentare un fenomeno con una linea continua (in questo caso una spezzata) dà l'idea che la variazione avvenga in modo continuo.

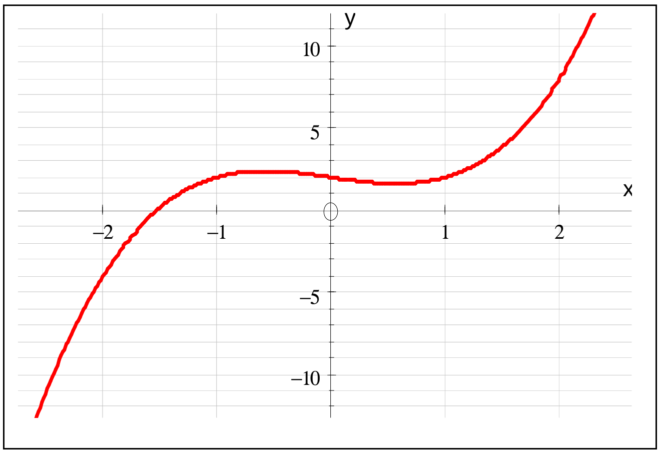


In altre parole, la lettura del grafico a destra induce a pensare che la temperatura alle 10:30 (ad esempio) fosse 37.8, o che tra le 9 e le 10 la temperatura sia rimasta fissa a 37.4. Questo non sta scritto nei dati (perché la temperatura non è stata rilevata né fra le 9 e le 10 né alle 10:30) ma è un procedimento matematico (*interpolazione*) che si effettua molto spesso per rappresentare graficamente un insieme di valori sperimentali, assumendo che il fenomeno in esame abbia un andamento regolare (in questo caso, lineare) fra due misurazioni.



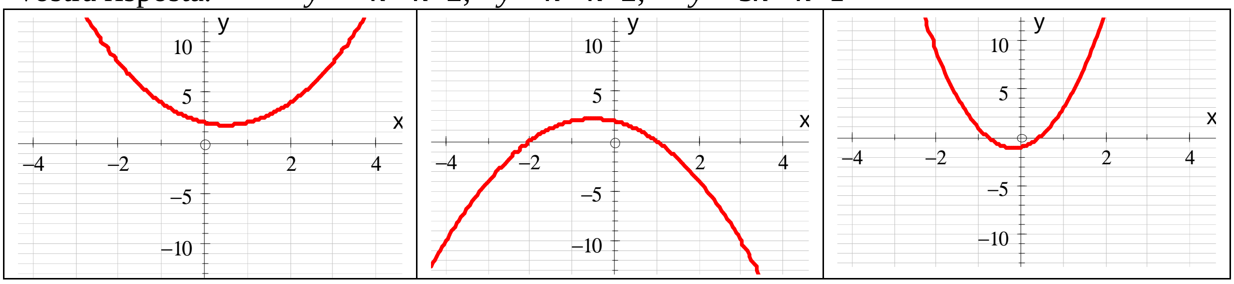
Problemi

1) Considerate il grafico della funzione f rappresentato nel diagramma che segue e rispondete alle domande.
   a) Quale dei seguenti valori approssima meglio $f(1)$: 1; 2; 3?
   b) Trovate, se esiste, un x tale che $f(x)$ sia circa 8.
   c) Nell'intervallo visualizzato, quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=1$?
   d) Nell'intervallo visualizzato, quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=2$?

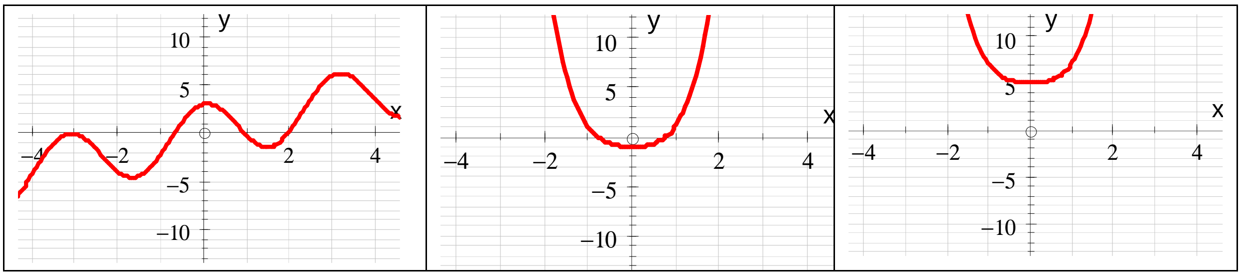


2) Per ciascuna delle seguenti equazioni stabilite se definiscono o no una funzione da P a P.
   - $3x+7y=0$
   - $y+x=x^2$
   - $(x+y)^2=0$
   - $x^3 = y^3$
   - $x^2+2y^2=1$

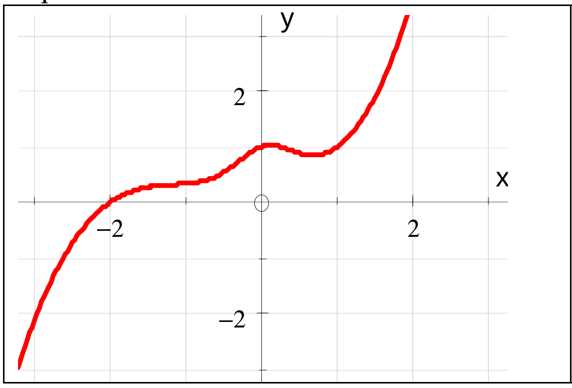
3) Associate ciascuna delle seguenti equazioni a uno dei seguenti grafici e spiegate a parole la vostra risposta. $y = -x^2-x+2$; $y = x^2-x+2$; $y = 3x^2+x-1$



4) Stabilite quali dei seguenti grafici certamente non corrispondono all'equazione $y = x^4+x^2+1$. Spiegate a parole.



5) Spiegate a parole perché il grafico sotto a sinistra non può corrispondere a nessuna delle equazioni in basso a destra.



- $y = (x-1)(x-2)$
- $y = (x^7+1)(x-2)$
- $y = (x-1)\sqrt{x^7 + \sqrt{x^2} + x}$
- $y = 1 + \sqrt{x^2 + 3}$
- $y = 2x+4$
- $y = x^2-4$

1.3. *Equazioni e disequazioni*

In questa sezione cercheremo di imparare a risolvere equazioni e disequazioni che mettono in gioco polinomi e di altri tipi di funzione, collegando la rappresentazione simbolica con quella grafica. Alcuni di questi aspetti sono già stati incontrati nella sezione precedente. Qui cerchiamo di capirli meglio attraverso una serie di esempi.

1.4. *Polinomi*

Per prima cosa, è bene imparare a sfruttare le rappresentazioni dei polinomi.

Problema 1

Trovate tutte le radici dell'equazione $x(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+2) = 0$.

L'espressione a sinistra del simbolo di uguaglianza è chiaramente un polinomio. La rappresentazione data rende estremamente facile il riconoscimento di tutte le sei radici. Da questo punto di vista molto meno utile sarebbe stata la rappresentazione in forma normale dello stesso polinomio:

$$x^6-3x^5-5x^4+15x^3+4x^2-12x.$$

Quest'ultima rappresentazione, rispetto alla precedente è più compatta e permette di riconoscere facilmente il grado del polinomio, ma non aiuta a trovare le radici.
In qualche caso la forma del polinomio ci consente di ricavare proprietà senza fare calcoli. Vediamo un esempio.

Problema 2

Trovate tutti i valori reali di x che soddisfano la relazione

$$x^8 + \sqrt{2}\cdot x^6 + \pi x^4 + \frac{7}{9}x^2 + \frac{165}{166} < 0.$$

Non servono calcoli o conoscenze particolari per capire che la disequazione non è verificata per alcun numero reale. Infatti si tratta della somma di 5 espressioni (monomi) di cui le prime 4 sono positive o nulle, e la quinta è strettamente positiva. Quindi anche la loro somma deve essere strettamente positiva.

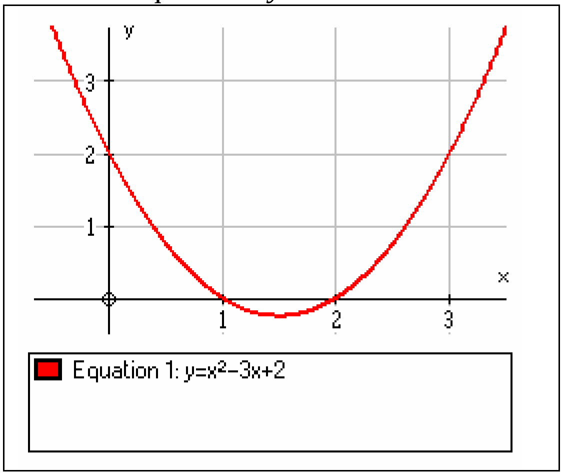
Problema 3
Trovate tutti i valori reali di x che verificano la relazione

$$x^2 > 3x-2.$$

La relazione data è equivalente alla relazione

$$x^2 - 3x+2 > 0.$$

Questo significa che i valori di x che soddisfano la prima coincidono con i valori di x che soddisfano la seconda. Rappresentiamo graficamente la funzione di equazione $y = x^2 - 3x+2$.



Risolvere la disequazione data significa trovare le ascisse dei punti del grafico che hanno ordinata positiva. Dalla lettura del grafico, nell'intervallo visualizzato, vediamo che la funzione è positiva per $x<1$ oppure $x>2$.
Lo stesso risultato si può ottenere osservando che

$$x^2 - 3x+2 = (x-1)(x-2).$$

L'espressione è uguale al prodotto di altre due espressioni. Per questo è positiva quando le due espressioni sono concordi (cioè, entrambe negative oppure entrambe positive) e negativa quando sono discordi.

Le due espressioni $x-1$ e $x-2$ sono entrambe positive per $x > 2$, e sono entrambe negative per $x < 1$. Per $1 < x < 2$, $x-1$ è negativa mentre $x-2$ è positiva e quindi il prodotto è negativo. Questo conferma quanto visto per via grafica.
Il problema poteva anche essere affrontato attraverso la formula risolutiva dell'equazione generale di II grado. Data un'equazione della forma

$$ax^2+bx+c = 0$$

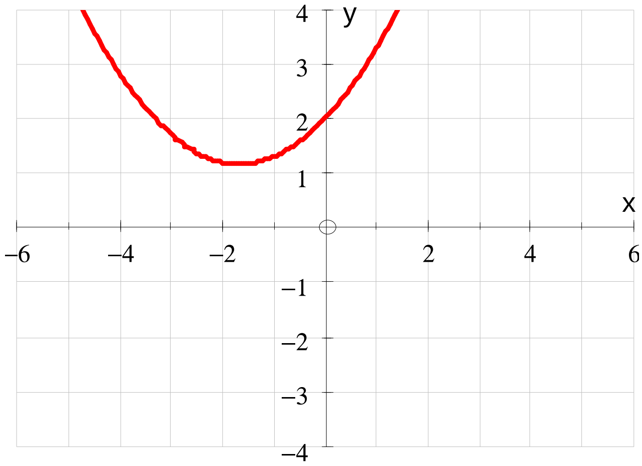
le radici si ottengono attraverso le formule

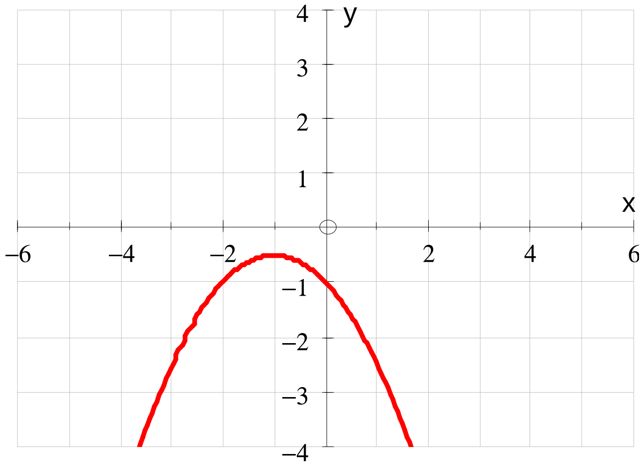
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se b^2-4ac è positivo si hanno due radici reali distinte, se è nullo si hanno due radici reali coincidenti, se è negativo si hanno due radici complesse coniugate. Nel caso vi siano due radici reali distinte il polinomio ha lo stesso segno di a per valori di x esterni rispetto all'intervallo che ha per estremi le radici, ha segno opposto per valori di x interni (come nel grafico dell'esempio precedente). Nel caso le radici siano complesse il polinomio ha lo stesso segno di a per ogni valore reale di x (come ad esempio i grafici A e B sotto). Nel caso di radici reali coincidenti il polinomio sia annulla nell'unica radice e ha lo stesso segno di a per ogni altro valore reale di x (grafici C e D sotto).

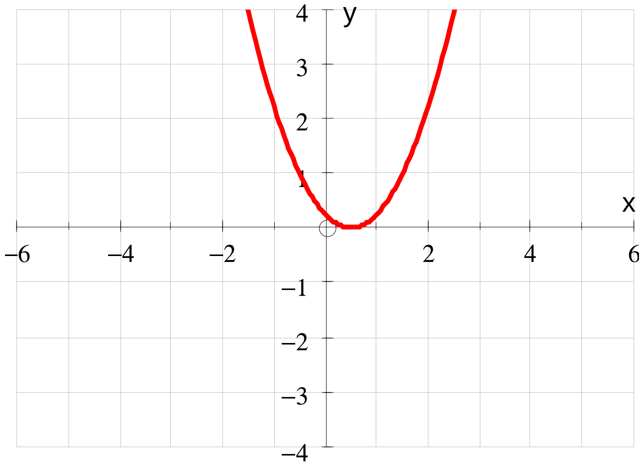
A) *Due radici complesse non reali, a positivo*

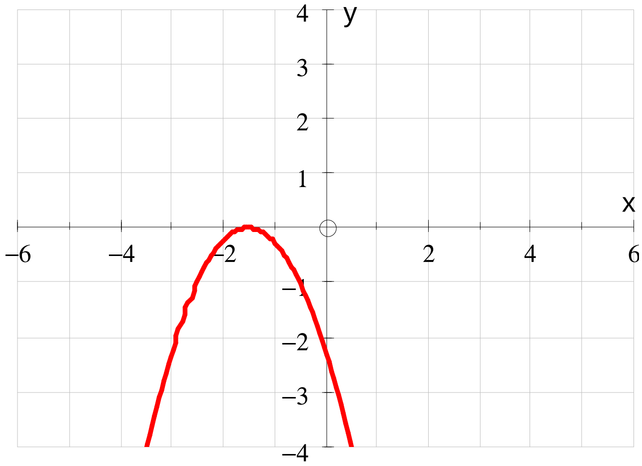
B) *Due radici complesse non reali, a negativo*





C) *Due radici reali coincidenti, a positivo* *Due radici reali coincidenti, a negativo*





La scomposizione in fattori primi, che si può ottenere anche attraverso programmi di manipolazione simbolica, come Derive, consente talvolta di affrontare senza difficoltà problemi un po' più complicati. Vediamo un esempio.

Problema 4
Trovate tutti i valori reali di x che verificano la relazione

$$x^3 > x.$$

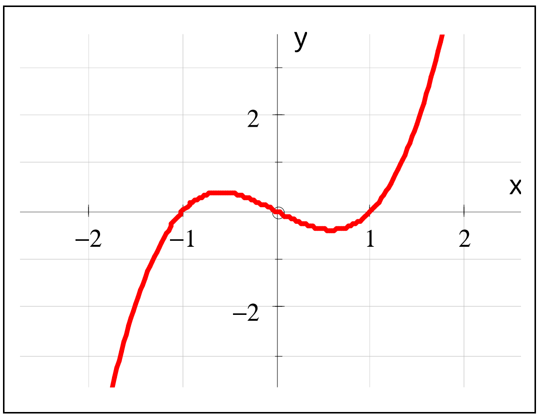
La relazione data è equivalente a

$$x^3 - x > 0$$

Il problema può essere risolto per via grafica tracciando il grafico della funzione definita dall'equazione

$$y = x^3 - x$$

e osservando che è positiva per $x > 1$ oppure $-1 < x < 0$.
Le informazioni fornite dal grafico vanno considerate con attenzione: il grafico non ci dice che cosa ne è della funzione al di fuori dell'intervallo $[-2,2]$. Il grafico ci suggerisce che la funzione si annulla in almeno 3 punti e che le radici potrebbero essere -1, 0, 1.



Da queste informazioni, o dalla conoscenza dei prodotti notevoli, o da un manipolatore simbolico ricaviamo che vale:

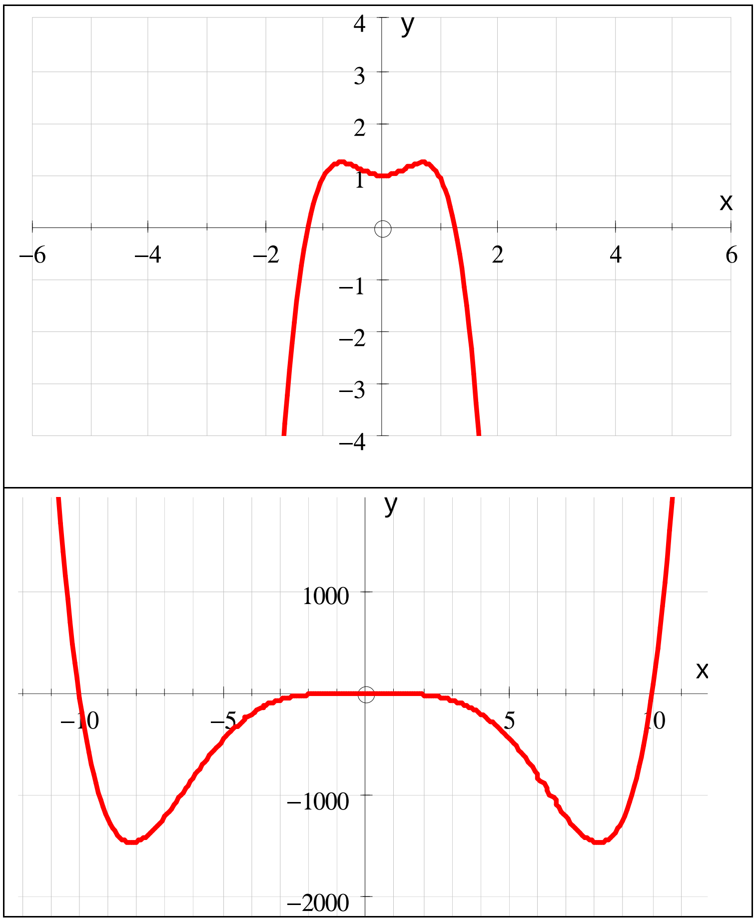
$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1).$$

Il prodotto di tre espressioni è positivo se sono tutte positive oppure se una è positiva e le altre due negative. Si vede subito che per $x > 1$ le tre espressioni sono positive, mentre per $-1 < x < 0$ due espressioni sono negative e una positiva. Quindi la risposta al problema originario è:

$$-1 < x < 0 \text{ oppure } 1 < x.$$

La sola rappresentazione grafica in qualche caso può essere fuorviante. Consideriamo ad esempio la funzione di equazione

$$y = \frac{(-x^4 + x^2 + 1) \cdot (100 - x^2)}{100}.$$



La sua rappresentazione grafica con la configurazione di default di alcuni programmi (grafico a destra) può indurre a pensare che la funzione sia positiva soltanto in un intervallo strettamente contenuto nell'intervallo $(-2,2)$. Utilizzando la funzione 'zoom out' (grafico sotto a destra) si comprende che le cose stanno diversamente. In questo grafico, a causa dell'unità di misura adottata sull'asse delle ordinate, sembra che la funzione si annulli nell'origine, mentre noi sappiamo che vale 1.

Un esame più attento del polinomio può suggerire di scriverlo in forma canonica ottenendo

$$\frac{x^6}{100} - \frac{101x^4}{100} + \frac{99x^2}{100} + 1$$

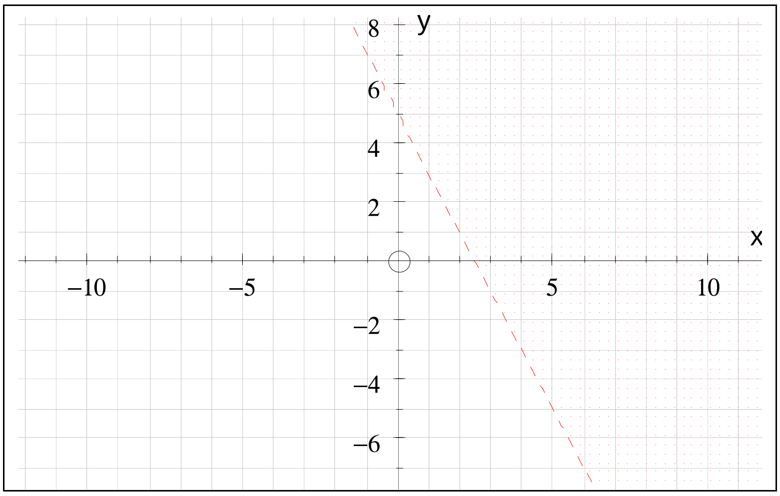
Il polinomio è di grado 6, il coefficiente del termine di grado massimo è positivo, quindi per x molto grande in valore assoluto, il polinomio deve assumere valori positivi.

I programmi che tracciano i grafici di funzioni consentono di affrontare visivamente diversi problemi.

Problema 5

Rappresentate sul piano cartesiano l'insieme delle coppie (x,y) tali che $2x+y-5>0$.

Il grafico a destra mostra una rappresentazione grafica di una parte limitata dell'insieme cercato. La retta di equazione $2x+y-5=0$ divide il piano in due semipiani. Il semipiano tratteggiato è l'insieme dei punti che soddisfano la disequazione data, mentre il semipiano bianco è l'insieme dei punti che soddisfano la disequazione $2x+y-5<0$



Nelle disequazioni, a differenza delle equazioni, cambiare il segno a entrambe le espressioni porta a una disequazione non equivalente. Per ottenerne una equivalente occorre cambiare il verso della disequazione. Ad esempio, la disequazione $-x < 5$ è equivalente a $x > -5$, non a $x < -5$.

1.5. Valore assoluto

Abbiamo già visto che il *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero reale è il numero reale stesso se questo è positivo o nullo, il numero reale cambiato di segno se questo è negativo. Il modulo di x è indicato con $|x|$.

La definizione formale è la seguente:

$$|x| := \begin{cases} x & se\, x \geq 0 \\ -x & se\, x < 0 \end{cases}$$

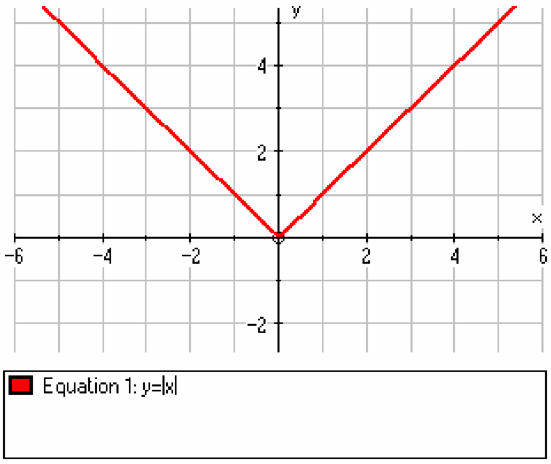
Attenzione!

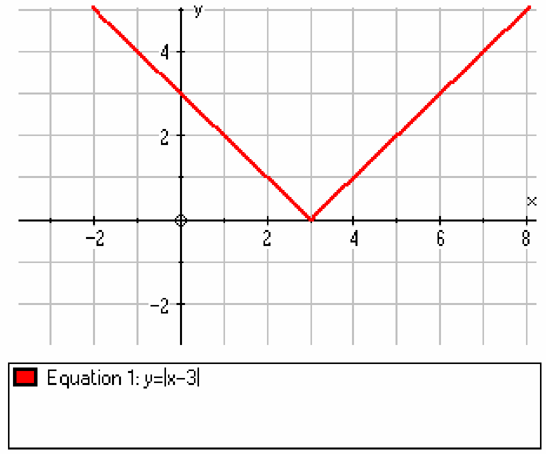
È comune la convinzione che un numero preceduto dal segno '–' sia necessariamente negativo. Questo non è vero: $-(-5)$ è un numero positivo. Anche $-x$ può essere positivo se x è negativo.

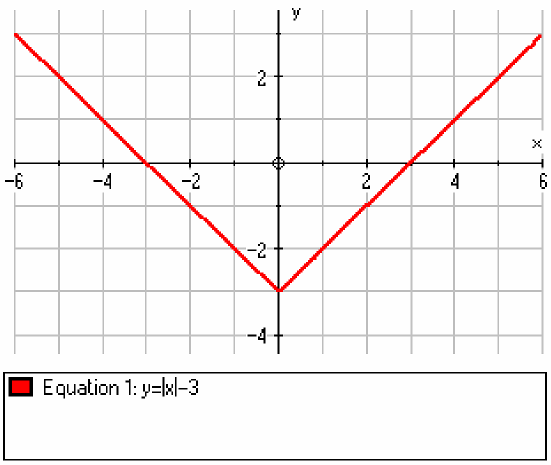
Esempi

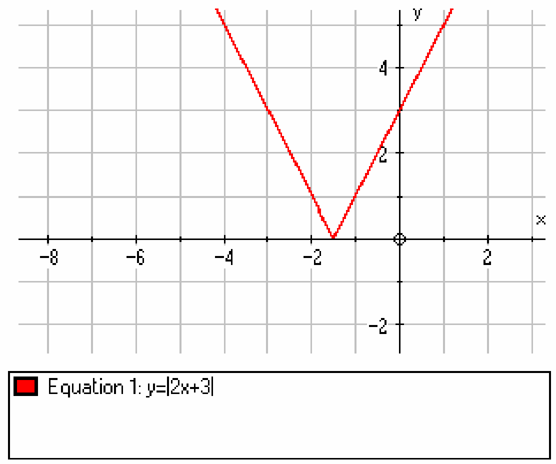
- $|-3|=3$
- $|3|=3$
- se $a= -2$ allora $|a| = -a$
- le soluzioni dell'equazione $|x| = 5$ sono due: 5 e -5.

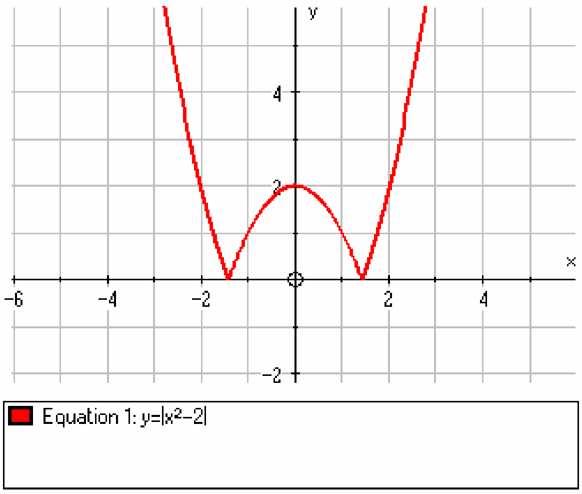
Ecco i grafici di alcune funzioni nella cui definizione compaiono moduli.

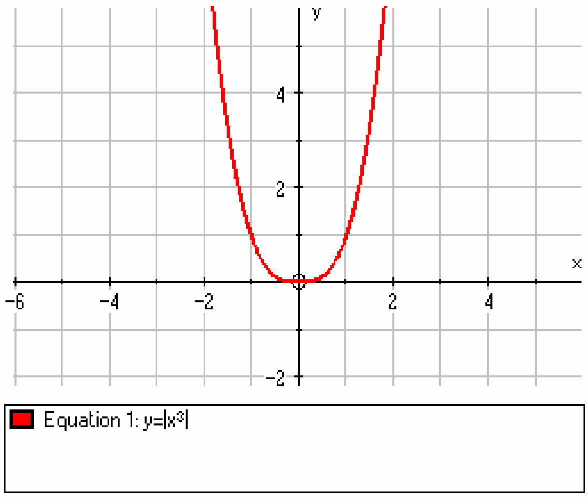












Problema 6

Trovate tutti gli x reali tali che $-5 = |x-7|$

Non servono calcoli per capire che questa equazione non può avere soluzioni: un numero negativo non può essere uguale a un numero positivo o nullo.

Problema 7

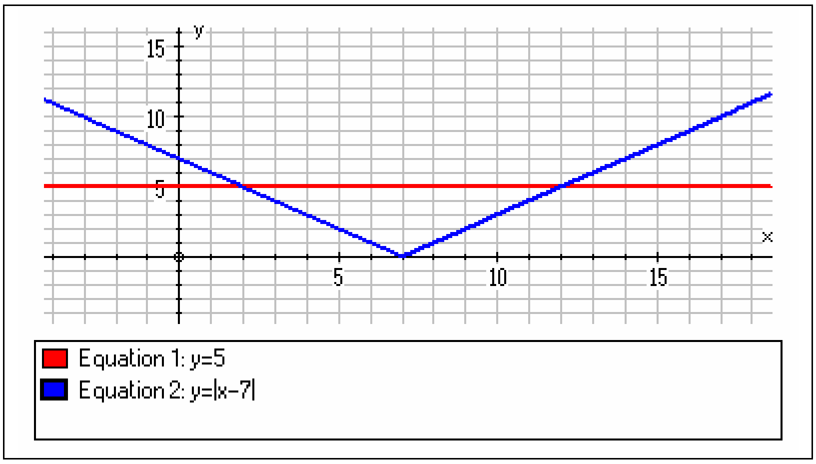
Trovate tutti gli x reali tali che

$$5 = |x-7|$$

L'equazione è risolta in due casi: $x-7 = 5$ e $x-7 = -5$.

Nel primo caso si ricava $x=12$, nel secondo $x=2$.

A destra sono tracciati i grafici della funzione di equazione $y=5$ e di quella di equazione $y=|x-7|$. Le soluzioni sono date dalle ascisse dei punti di intersezione.



Problema 8

Trovate tutti gli x reali tali che $|x| = |x+1|$.

Prima di tutto bisogna resistere alla tentazione di pensare che l'equazione non ha soluzioni perché, come dice qualcuno, "un numero non può essere uguale al suo successivo".

Anche in questo caso si eliminano i moduli e si ottengono due equazioni, e precisamente:

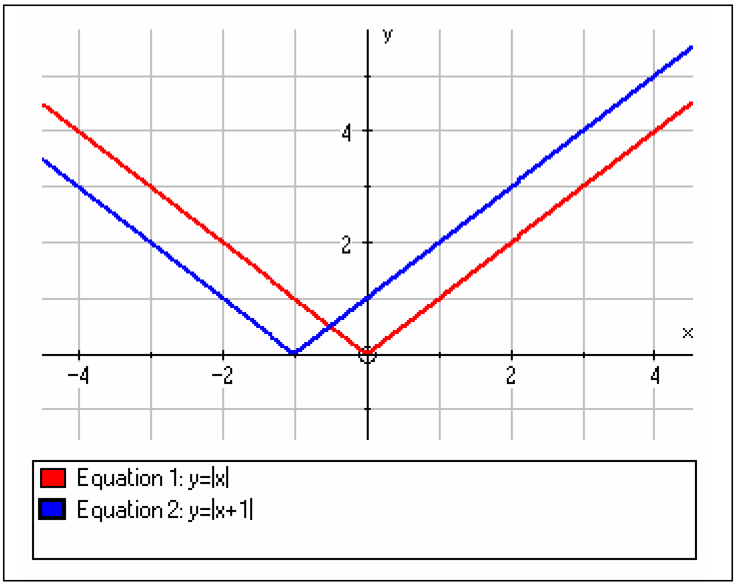
$$x = x+1$$

$$-x = x+1$$

La prima equazione non ha evidentemente soluzioni reali, ma la seconda ne ha una:

$$\left(x = -\frac{1}{2}\right)$$

A destra sono tracciati i grafici della funzione di equazione $y=|x|$ e di quella di equazione $y=|x+1|$. Il grafico mostra che non vi sono soluzioni nel semipiano delle x positive, ma che una soluzione si trova nel semipiano delle x negative.



Attenzione!

Le soluzioni di un'equazione come $|x| = |x+1|$ sono tutti i valori di x che soddisfano l'equazione $x = x+1$ oppure $-x = x+1$. Non è necessario che le soddisfino entrambe. In altre parole, le due equazioni che si ottengono quando si elimina un modulo non costituiscono un sistema.

Problema 9

Trovate tutti gli x reali tali che $|x| < |x+1|$.

È necessario ragionare sui segni, aiutandosi col grafico del problema precedente.

Se $x \geq 0$, le espressioni dentro ai moduli sono entrambe positive o nulle e la disequazione è equivalente a

$$x < x+1,$$

che è verificata da tutti i valori positivi di x.
Se $x<-1$, le espressioni dentro ai moduli sono entrambe negative e la disequazione è, in tal caso, equivalente a $-x < -x-1$, che non è verificata da alcun valore di x minore di -1.
Se $x = -1$ la disequazione non è verificata.
Se $-1<x<0$, x è negativa, mentre $x+1$ è positiva e la disequazione è equivalente a

$$-x < x+1$$

che è verificata da tutti gli x tali che $-\frac{1}{2} < x < 0$.
In sintesi, come illustrato dal grafico sopra, la disequazione originaria è verificata da tutti e soli i valori dell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Problema 10
Trovate tutte le coppie (x,y) tali che $|x+y| = |x|+|y|$.
Anche qui bisogna resistere alla tentazione di pensare che l'uguaglianza sia sempre verificata.
Se almeno uno dei due valori è nullo, l'uguaglianza è verificata.
Se x, y sono entrambi positivi si ha

$$|x+y| = x+y$$
$$|x| = x$$
$$|y| = y$$

e l'uguaglianza è verificata.
Analogamente, se x, y sono entrambi negativi si ha

$$|x+y| = -(x+y)$$
$$|x| = -x$$
$$|y| = -y$$

e l'uguaglianza è ancora verificata.
Rimane il caso di x, y discordi. In tal caso l'uguaglianza non è verificata. Vediamo un controesempio: se $x = 5$, $y = -8$ si ha:

$$|x+y| = |5-8| = |-3| = 3$$
$$|x| = 5$$
$$|y| = 8$$
$$|x|+|y| = 13.$$

Problema 11
Trovate tutte le coppie (x,y) tali che $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

In questo caso si vede abbastanza facilmente che l'uguaglianza vale per tutti i valori reali di x, y. Si può controllare esaminando tutti i casi, tenendo conto che vale

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Problemi proposti
Trovate tutti i valori reali di x che soddisfano le seguenti equazioni o disequazioni

1) $\frac{10x}{3}+1=\frac{5x}{2}+3$
2) $4-x = -7x-2$
3) $\frac{x}{2}-4<2x-\frac{3}{2}$

4) $3x+\frac{5}{6}<2x+\frac{5}{6}$

5) $-7x^2+3x-4=0$

6) $-7x^2+3x-4<0$

7) $-5x^2+3x+2=0$

8) $x^{16}-1=0$

9) $x^{16}-1>0$

10) $\sqrt{3-2x}=x$

11) $\left(x-\sqrt{5}\right)^7=0$

12) $x^2+7x+12>0$

13) $|x+9|=9$

14) $|x+9|=-9$

15) $|x-9|=-9$

16) $|x-9|=9$

17) $|x+7|=|x|$

18) $|x+7|=x$

19) $|x+7|=-x$

20) $|x+7|<-x$

21) $|2x|<|3x|$

22) $|2x+5|=|2x|+5$

23) $|2x-5|=|2x|-5$

Trovate tutti i valori reali di x, y che soddisfano le seguenti equazioni o disequazioni

24) $(x+y)^2\le x^2+y^2$

25) $(x+y)^2\le x^2+y^2$

26) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (x,y non negativi)

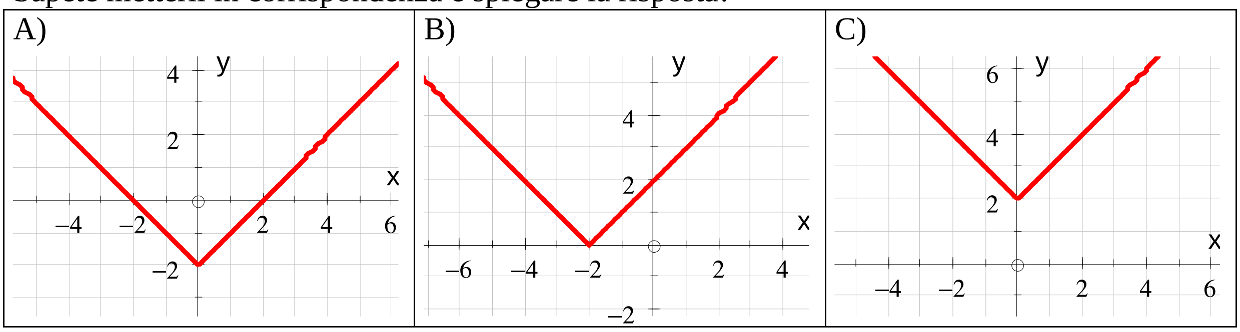
27) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (x, y diversi da zero)

28) $\frac{(2x-1)(5x+1)+1}{2x-1}=5x+2$ (x diverso da 0.5)

29) Ciascuno dei tre grafici che seguono corrisponde a una fra le seguenti equazioni:

$$y=|x+2|,\ y=|x|+2,\ y=|x|-2.$$

Sapete metterli in corrispondenza e spiegare la risposta?

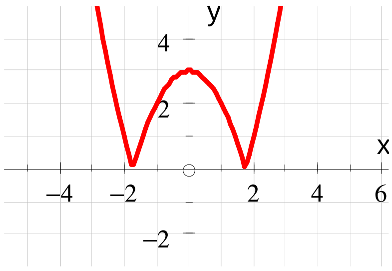


30) Ciascuno dei tre grafici che seguono corrisponde a una fra le seguenti equazioni:

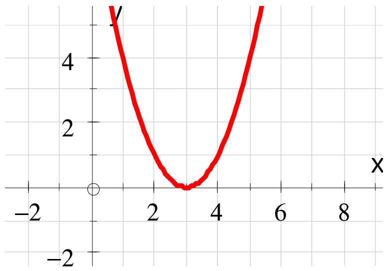
$$y = |x^2-3|,\ y = (x-3)^2,\ y = x^2-3.$$

Sapete metterli in corrispondenza e spiegare la risposta?

A)



B)



C)