I MISCONCETTI

1. INTRODUZIONE
Il modello costruttivista presentato nel capitolo precedente vede nell'allievo un soggetto attivo che costruisce la propria conoscenza e che interpreta l'esperienza. Questo punto di vista permette di spiegare molti errori in matematica in modi alternativi rispetto a quello tradizionale, secondo il quale l'errore è semplicemente frutto di mancanza di conoscenze o abilità. Le teorie coerenti con tale modello e sinteticamente presentate nel capitolo precedente su contesto, razionalità, linguaggio, forniscono infatti nuovi strumenti per interpretare i comportamenti degli allievi, ed aprono quindi uno scenario di possibilità cui far riferimento quando cerchiamo di capirne le risposte per poi intervenire con maggiore efficacia.
Seguendo la traccia di tale quadro teorico, in questo capitolo vedremo alcune implicazioni generali del modello costruttivista riguardo all'interpretazione di errori sistematici, che ci porteranno a parlare di *misconceptions*, o *misconcetti*.

2. DIETRO GLI ERRORI SISTEMATICI
L'ipotesi che gli allievi interpretino in modo personale le procedure trova conferme in un lavoro molto citato a sostegno della tesi costruttivista: quello di Brown e Burton (1978) sugli errori sistematici nella sottrazione. Dall'analisi di tali errori gli autori concludono che gli allievi *interpretano* gli algoritmi spiegati dall'insegnante. In particolare essi suggeriscono che molti bambini sbagliano non perché applicano in modo scorretto algoritmi corretti, ma perché *applicano in modo corretto algoritmi scorretti.*
Un errore (*bug*) piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:

278-	352-	406-	543-	510-	1023-
135=	146=	219=	367=	238=	835=
143	214	213	224	328	1812

L'errore è sistematico, e pare essere frutto di una *modificazione plausibile della procedura standard*: 'in ogni colonna si sottrae *sempre* la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione'.
Spesso il tipo di comportamento descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se a differenza dello scienziato non è consapevole di generalizzare, ma soprattutto generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati.
Brown e Burton sottolineano come è importante che l'insegnante sia consapevole della presenza di *bugs* in certi comportamenti. Se questo non avviene, essi osservano, l'insegnante tenderà ad interpretare il fallimento come negligenza o come ignoranza completa dell'algoritmo: nel primo caso assegnerà al bambino numerosi esercizi, nel secondo rispiegherà probabilmente l'intero algoritmo.
L'esempio particolarmente suggestivo con cui gli autori sostengono la propria posizione ci riporta alla prima scena della nostra Galleria: quella di Johnnie. Ma vediamo la descrizione originale di Brown e Burton, che i ricercatori fanno mettendosi nei panni del bambino:

Egli sta seguendo quello che ritiene essere l'algoritmo corretto e che, apparentemente a caso, viene segnato come errato. Ad esempio, Johnnie sottrae 284 da 437 e ottiene 253:

437 -

$$\begin{array}{r} 284 = \\ \hline 253 \end{array}$$

L'insegnante commenta: 'Hai dimenticato di sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia'. Disgraziatamente, l'algoritmo di Johnnie consisteva nel sottrarre la cifra più bassa da quella più alta in ogni colonna. Johnnie non ha la minima idea di quello che intende l'insegnante e si sente molto stupido per il fatto che non capisce. L'insegnante è d'accordo con questa affermazione dato che nessuno dei suoi rimedi ha avuto effetto sulla performance di Johnnie [Brown e Burton, 1978, pp.167-168].

Il disorientamento di Johnnie fa pensare a quello che succede quando cerchiamo di dare un suggerimento ad un allievo che, interrogato, si dimostra in difficoltà, quasi bloccato: spesso il nostro suggerimento, invece di aiutarlo, sembra confonderlo ancora di più. Evidentemente la nostra indicazione costituisce un suggerimento per chi è già sul nostro percorso risolutivo, ma diventa motivo di disorientamento per chi invece sta riflettendo su un percorso alternativo.

3. MISCONCETTI

Nei lavori che abbiamo preso in considerazione compare un termine – *misconception* - che negli anni successivi diventerà estremamente popolare in educazione matematica. In questi primi studi l'uso che ne fanno i ricercatori non è ancora quello 'tecnico' che si trova oggi in letteratura, anche se con un senso vicino a quello del linguaggio naturale la parola 'misconception' sta già ad indicare un fraintendimento od una concezione errata che ha però una sua logica interna.
A partire dagli anni '80, anche sotto l'influenza degli studi sulla fisica ingenua e sui processi decisionali citati nel capitolo precedente, il termine *misconception* verrà usato sistematicamente in educazione matematica, assumendo sempre più la connotazione di un nuovo costrutto. In italiano viene tradotto in più modi: concezioni errate, misconcezioni, e soprattutto misconcetti (si veda Zan, 2000 a; D'Amore e Sbaragli, 2005).

L'uso sempre più frequente del termine negli anni successivi testimonia la crescente adesione al modello costruttivista dell'apprendimento ed al nuovo approccio all'interpretazione degli errori che tale modello comporta. Gli studi sui misconcetti riflettono anche il cambiamento di metodologia tipico di quegli anni: le interviste cliniche a pochi soggetti sostituiscono le analisi statistiche condotte con campioni numerosi. D'altra parte nel caso dei misconcetti la fonte privilegiata di informazioni sono gli allievi stessi, soprattutto nella fase in cui i ricercatori cercano di ricostruire i processi (di pensiero, o risolutivi, o di apprendimento) che hanno portato ad un dato errore.
Come spesso accade con le nuove idee, a questo primo periodo di entusiasmo e popolarità segue un momento di riflessione e di approfondimento, e quindi anche di critica.
Del resto già il lavoro di Michael Shaughnessy -*Problem Solving Derailers: The Influence of Misconceptions on Problem Solving Performance* - muove alcune contestazioni all'uso indiscriminato del termine da parte di ricercatori ed insegnanti. Shaughnessy sottolinea il rischio che la parola 'misconcetto' faccia da ombrello per una miriade di fenomeni che non si lasciano interpretare semplicemente in termini di mancanza di conoscenze. Questo uso può portare a sostituire la tradizionale diagnosi del fallimento degli studenti "Non hanno abbastanza conoscenze" con una diagnosi più moderna, che rischia però di rimanere altrettanto improduttiva: "Hanno troppi misconcetti".
Le contestazioni più recenti all'uso del termine 'misconcetto' sono basate sul rifiuto della connotazione negativa considerata implicita nel prefisso 'mis', ma anche sulla messa in discussione della possibilità di parlare di 'correttezza' (e quindi di scorrettezza) in termini

assoluti. Secondo un punto di vista condiviso da molti ricercatori, e che d'altronde riflette l'epistemologia dell'errore su cui abbiamo riflettuto, i misconcetti sono infatti considerati un momento necessario nel passaggio da un certo livello di conoscenza ad uno superiore, in quanto l'apprendimento richiede continuamente una ricostruzione cognitiva che implica un periodo di conflitto e confusione.
Queste contestazioni portano a preferire termini quali 'preconcezioni', 'concezioni alternative', 'teorie ingenue'. Come osserva Cavallini (1995) facendo riferimento al campo delle scienze sperimentali, "la qualifica di alternative […] segna una svolta fondamentale nell'interpretarle. L'attenzione è attratta non più tanto sulla loro presunta immaturità e erroneità, quanto piuttosto sulla loro legittimità nei contesti adeguati" (Cavallini, 1995, p. 158).
Una contestazione che invece fa riferimento in modo specifico all'uso del termine in educazione matematica è fatta da Gardner (1991):

Quando si parla dei problemi che gli studenti incontrano sul terreno dell'aritmetica, l'espressione "concezione errata" non è la più felice e potrebbe perfino non essere corretta. Nella sfera delle scienze naturali gli studenti possiedono teorie abbastanza sviluppate della materia e della vita, teorie che a volte risultano essere in contrasto con i principi della fisica e della biologia. Relativamente alla matematica, invece, non è esatto dire che gli studenti hanno concezioni errate in contrasto con le conoscenze disciplinari formali. L'idea da me proposta è, più precisamente, che molti studenti accantonano le proprie conoscenze intuitive sui numeri e sulle cose (per esempio sul tempo, sul denaro e sui pezzi di pizza) e cercano invece di seguire rigidamente certe regole di soluzione dei problemi. Solo quando il problema, così come viene effettivamente posto, ricalca l'algoritmo di cui gli studenti si sono impadroniti, questi riusciranno a dare la risposta giusta; al contrario, in presenza di qualche alterazione nella formulazione del quesito, gli studenti probabilmente perderanno completamente la strada.
Quanto più ci si allontana dalla sfera delle scienze naturali, tanto più la nozione di "concezione errata" si rivela inadeguata". Qui sarà meglio parlare di "stereotipi" o di "copioni", ossia di visioni molto radicate e rigide sul modo corretto di affrontare le questioni umane [Gardner, 1991, tr. it. pp. 175-176].

Ed in effetti bisogna riconoscere che fra gli ambiti di studi in cui il termine *misconception* è stato introdotto (fisica e processi decisionali) e la matematica ci sono differenze significative. Nel caso della fisica e dei processi decisionali sono molti i misconcetti che derivano dalle prime interazioni che il bambino ha con la realtà, nel tentativo di interpretarla. Il ruolo della matematica formale invece in questo stadio è decisamente marginale: se problemi significativi di fisica o di scelta si presentano nell'esperienza del bambino fin dai primi anni di vita, le prime esperienze con la matematica la vedono per lo più strumento in attività di manipolazione di oggetti. Certamente tali attività sono di importanza fondamentale e permettono al bambino ancora piccolo l'acquisizione di competenze aritmetiche (cfr. Gelman e Gallistel, 1978), ma 'fare matematica' in modo significativo presuppone una riflessione sugli oggetti dell'esperienza, che a sua volta è legata alla possibilità di utilizzare un linguaggio specifico. In questo senso per molti bambini il primo vero contatto con la matematica avviene a scuola, ed è proprio a scuola che essi costruiscono eventualmente le prime *concezioni errate*, interpretando i messaggi dell'insegnante.
Tutte queste critiche al termine 'misconcetti' hanno un fondamento teorico, e sono il risultato di un progressivo affinamento della ricerca in educazione matematica. In particolare è vero che l'etichetta 'misconcetti' è usata ormai con tale facilità da comprendere una varietà di fenomeni, come è vero che per descrivere alcuni di questi fenomeni possono essere altrettanto adeguati, o addirittura più adeguati, altri termini, altri costrutti, altri quadri teorici. Ma non si può ignorare o sottovalutare la svolta radicale che l'idea di misconcetto e l'approccio all'errore che essa veicola ha rappresentato nel momento e nel contesto in cui è nata, con il suo mettere l'allievo ed i suoi processi di pensiero al centro dell'attenzione del ricercatore e

dell'insegnante. E' questo spostamento di punto di vista che qui mi interessa, spostamento coerente con un modello d'apprendimento che riconosce al discente il ruolo di interprete dell'esperienza, e di soggetto attivo che costruisce la propria conoscenza. Più precisamente mi interessa sottolineare come questo modello metta in crisi l'interpretazione tradizionale degli errori, che li vede semplicemente prodotto di conoscenze insufficienti. L'allievo infatti *interpreta* l'esperienza con la matematica, in particolare i messaggi che l'insegnante continuamente manda: messaggi che hanno come oggetto algoritmi, termini, simboli, proprietà, concetti. L'allievo dà un *senso* a questi messaggi, senso che dipende naturalmente dalle conoscenze che egli ha ma anche da tanti altri elementi meno ovvi. Quell'algoritmo, quel termine, quel simbolo, quella proprietà, quel concetto, verranno interiorizzati secondo il senso attribuito dall'allievo, e può accadere che tale senso non coincida con quello che l'insegnante intendeva comunicare. E' con questa accezione che in seguito continuerò ad usare indifferentemente i termini *concezioni errate*, *concezioni alternative*, *misconcetti*, *misconceptions*, pur consapevole dei limiti che alcune di queste espressioni possono avere e che ho riportato prima.
Ma vediamo ora come l'idea di misconcetto può fornirci interpretazioni convincenti dei comportamenti descritti in alcune scene della nostra Galleria iniziale.

3.1 Scena 9: Irene

Nell'insegnamento della matematica l'allievo entra continuamente in contatto con nuovi simboli, che poi l'accompagneranno per tutto il suo percorso scolastico: uno dei primi segni incontrati è quello di '='. Sul significato attribuito dagli allievi a questo simbolo ci sono numerosi studi: tali studi suggeriscono che il segno '=' viene per lo più interpretato (anche da molti ragazzi di scuola superiore) come 'comando' di esecuzione di operazioni (Kieran, 1981). Kieran riporta fra l'altro i risultati di uno studio di Behr, Erlwanger e Nichols (1976) in cui bambini di 11 anni interrogati sul significato della scrittura '3 = 3' rispondono *"Può voler dire 6 – 3 = 3 o 7 - 4 = 3"*. Davanti ad espressioni quali '4 + 5 = 3 + 6' bambini più piccoli reagiscono dicendo: *"Dopo il segno '=' ci deve essere la risposta, e non un altro problema!"* e quindi trasformano l'espressione iniziale nelle due espressioni "4 + 5 = 9" e "3 + 6 = 9".
Kieran cita anche uno studio di Vergnaud, Benhadj e Dussouet (1979), in cui si riportano i testi scritti da ragazzi di 13 anni per risolvere il problema:
In un bosco vengono piantati 425 alberi nuovi. Qualche anno dopo, vengono abbattuti i 217 alberi più vecchi. Nel bosco ci sono quindi 1063 alberi. Quanti alberi c'erano prima che venissero piantati quelli nuovi?
Molti studenti scrivono:
1063 + 217 = 1280 – 425 = 1063
L'uguaglianza:
1063 + 217 = 1280 – 425
riflette l'idea di uguale come comando per eseguire un'operazione, confermando l'ipotesi suggerita prima. L'ultima uguaglianza, 1280 – 425 = 1063, sembra indicare il bisogno dell'allievo di collegare in qualche modo i suoi calcoli con i dati iniziali.

Qualche anno fa un'insegnante di scuola elementare, Rosa Santarelli, mi ha mandato la registrazione di una discussione in classe sull'uso del segno'=' in matematica, da cui emerge con chiarezza l'interpretazione di 'comando' che ne danno molti bambini.
L'insegnante decide di proporre questa discussione in due terze dopo l'osservazione dei testi scritti da molti bambini di una classe parallela per risolvere il seguente problema, assegnato nei primi giorni di scuola:
Quanti sono stati i giorni di vacanza quest'estate?
Molti bambini risolvono così:

30 - 10 = 20 + 31 = 51 + 31 = 82 + 15 = 97
Per portare l'attenzione dei bambini sull'uso scorretto dell'uguale in questa scrittura l'insegnante chiede:
"*Secondo voi questo calcolo fatto da due bambini di terza è giusto?*"
La discussione che segue mette in evidenza che i bambini concentrano l'attenzione sul processo risolutivo e sul risultato, ignorando la forma. Riporto solo alcuni stralci particolarmente significativi:

STE: Secondo me i due bambini hanno fatto giusto, perché loro hanno pensato a tutti i mesi che sono stati in vacanza. Allora loro hanno detto: questo mese ha questo tot di giorni, allora hanno messo quel mese, solo che quando eravamo a giugno siamo stati dieci giorni a scuola e hanno messo 30 - 10. I dieci vuol dire che i dieci sono i dieci giorni che sono stati a scuola. Poi hanno messo l'uguale e hanno messo venti e da quei venti hanno iniziato a contare tutti i giorni che non sono stati a scuola. Poi hanno fatto più 31 e hanno fatto 51, più 31 uguale 82 più 15, cioè i giorni di settembre uguale 97. Allora dopo loro hanno capito qual era il risultato, l'hanno scritto e hanno scritto il risultato, secondo me è giusto quello che hanno fatto.
ILA: Anche per me è giusto perché hanno fatto anche con i mesi, come ha detto Stefano e poi il risultato è sempre 97 e quindi anche per me è giusto.
[…]
SAM: Questa operazione è giusta e hanno fatto bene a farla così perché potevano metterci anche più tempo a farla normale, perché non avevano già il calcolo dei mesi. Hanno fatto bene, quindi gli è venuta giusta. Cioè hanno impiegato anche poco tempo perché hanno fatto… prendevano i numeri e facevano già il risultato e poi aggiungevano e facevano il risultato. Per me hanno fatto giusto.
ELI: Anche secondo me è tutto giusto, anche se c'era un modo per farlo più semplicemente, forse hanno voluto appunto far vedere i vari pezzi di calcolo messi insieme. Il modo di farlo più semplice era scrivere il calcolo: 30-10 a mente e scrivere 20+31+31+15 e fare il risultato. [Elisa scrive alla lavagna il suo calcolo 20+31+31+15 = 97)]
[…]
ILA: I bambini che hanno fatto questa operazione qua l'hanno fatta giusta, solo che l'hanno fatta più lunga, invece la Elisa le è venuto in mente che l'avevano fatta troppo lunga e quindi bisognava un pochino più accorciarla, però hanno fatto una cosa giusta, però bisognerebbe fare una cosa più semplice.

Come si intuisce da questi stralci l'attenzione dei bambini è concentrata sul processo risolutivo e sul prodotto finale, *non* sulla scrittura.
L'insegnante allora porta l'attenzione esplicitamente sull'aspetto che le interessa, aprendo una seconda discussione con la domanda:
"Che cosa significa il segno «=» in matematica?"
Anche in questo caso riporto solo alcuni stralci:

GIO: Secondo me uguale vuol dire che se te hai 20+30 per esempio tu metti l'uguale e ti viene il risultato**.** L'uguale ti dice il risultato di un'operazione. Oppure fai 10-5, così, ti viene cinque. Fai l'operazione e dopo devi mettere l'uguale.
CAR: Se vuoi usare quel segno in un'operazione, per esempio in una sottrazione, lo devi mettere sempre alla fine, perché, non so, fai 5+5= e devi mettere 10.
STE: Secondo me questo uguale, quando fai delle operazioni e devi scrivere il risultato devi sempre prima di mettere il risultato mettere questo = e dopo sempre così. Ogni volta che fai un'operazione devi fare sempre l'uguale prima del risultato in ogni caso, anche se fai la per, se fai il diviso, prima di mettere il risultato devi mettere =.
[…]
INS: Cosa vuol dire 'essere uguale a' , quel segno lì in matematica che significa?
ILA: Vuol dire che viene il risultato.
[…]

SAM: Uguale, se lo usi in matematica, di solito lo trovi sulle operazioni. Quello sulle operazioni serve solo a far venire il risultato sulle operazioni.
[…]
LUI: Tu per fare l'uguale devi fare prima l'operazione e poi devi fare l'uguale, così ti viene fuori il risultato.
[…]
INS: E se io scrivo 8 = 8 va bene?
GIO: No, devi anche metterci +0 perché se no non si capisce, devi metterci anche qualcosa.
INS: Ma allora io sbaglio se scrivo che 8 = 8.
GIO: Sì, sbagli, se vuoi scrivere 8 e il risultato vuoi che sia 8 devi scrivere 8+0 = 8 oppure 8-0 = 8.

La stessa discussione viene proposta anche in un'altra terza:

DEB: Secondo me il segno = in matematica è come l'operazione, come la più, solo che è l'ultima che dopo c'è il numero. Secondo me è un segno di matematica che ci appare in ultimo, che dopo c'è il numero che viene fuori.
[…]
FED: Secondo me l'= è come un operaio, come un uomo che fa tutte le azioni della matematica perché lui dà il risultato. La cosa che dovrebbe dare l'= è dare il risultato ad una somma.
[…]
SPO: Per me l'=, quando tu fai tipo 30-20 che fa 10, l'uguale quando c'è la più le somma e quando c'è la meno dà il risultato di quello che viene, che toglie, toglie il 20 dal 30 e viene fuori 10 e lui le somma.
BAR: Secondo me l'uguale è un segno che si mette alla fine di tutto il lavoro delle più e delle meno.
[…]
JAC: Quando si è finita un'operazione si fa l'uguale e si dice il risultato. Secondo me quando si è finito un calcolo si mette l'uguale e si dice il risultato. Non in mezzo, da tutte le parti, solo alla fine, finito il calcolo.
AKR: Per esempio come 5+5 fa 10, poi mettiamo uguale e scriviamo 10. E 5… che adesso c'è 5, poi c'è 5, un altro, fa 10 e metti l'uguale e l'uguale conta.
ALB: Secondo me l'uguale serve a dire la fine di un'operazione perché tu non puoi mettere in mezzo a quell'operazione uguale perché se lo metti, allora tu fai conto 30-10=20, ma ti devi fermare là. È tutta un'operazione quella, però la devi dividere dalle altre perché quella è proprio la fine dell'operazione.
[…]
GIAN: Uguale! Uguale vuol dire… quando fai un'operazione alla fine per fare una somma devi mettere l'uguale e viene il risultato.
[…]
MAU: Allora secondo me l'uguale quando rinchiude come dentro una scatola i numeri, gli dice come "guarda che devi dare il risultato!" e poi esce ed esce il risultato.
[…]
MAU: Volevo dire che uguale si chiama uguale e l'hanno chiamato anche uguale, [ride] mi fa ridere…, l'hanno chiamato uguale come uguale [...] perché il suo segno sono due striscette uguali.

Come detto all'inizio, questo errore nell'uso del segno '=' è molto diffuso, e non solo fra i bambini. Molti insegnanti ritengono che comunque non si tratti di un errore *grave*, perché ha a che fare solo con la forma, e non riguarda il ragionamento.
In realtà questa interpretazione del segno uguale crea non poche difficoltà in contesto algebrico, dove è richiesta invece la comprensione della valenza relazionale del simbolo. In mancanza di tale interpretazione, il fatto che aggiungendo ai due membri di un'equazione la stessa quantità si ottiene un'equazione equivalente può apparire incomprensibile, perché l'attenzione del soggetto è centrata sul primo membro dell'equazione, che in effetti *cambia* dopo l'aggiunta di tale quantità. In presenza di questo misconcetto allora le proprietà delle equazioni diventeranno regole prive di senso da memorizzare: lo studente può solo accettarle e adeguarsi.

Proprio come Alice, mia figlia.
Un giorno, in prima liceo, è alle prese con le equazioni. Vista la sua scarsa disinvoltura nel 'portare' numeri da una parte all'altra di un'equazione le spiego cosa c'è sotto: è come se si aggiungesse la stessa quantità a sinistra e a destra, quindi…
Quindi, dice Alice*: "Io mi adeguo. Non sarò certo io a contestare queste regole, visto che ci sono da tanto tempo. Ma nessuno mi potrà mai convincere che se si aggiunge una stessa quantità a sinistra e a destra non cambia niente!"*
Queste osservazioni ci riportano ad una delle scene della nostra Galleria iniziale, quella che ha come protagonista Irene.
La ragazza, prima liceo classico, deve risolvere l'equazione:
$x^2 = 3x - 2$
Procede così:
$x^2 + 3x + 2 = 0$
E trova quindi correttamente le due soluzioni di quest'ultima equazione.

Certamente può darsi che si tratti di una svista: un solo errore non ci dà informazioni sufficienti. Ma supponiamo di verificare che questa 'svista' in realtà si ripete, come se Irene spostasse addendi da una parte all'altra… adeguandosi alla regola che le è stata insegnata. Se la ragazza non ha maturato un'interpretazione relazionale del simbolo '=', come Alice, non si convincerà mai "*che se si aggiunge una stessa quantità a sinistra e a destra non cambia niente!"*
Dal punto di vista dell'intervento di recupero queste considerazioni hanno implicazioni importanti. Evidenziano i limiti di un'interpretazione fondata sull'osservazione di un singolo episodio, e quindi la necessità di raccogliere informazioni sufficienti per formulare un'ipotesi interpretativa. Suggeriscono inoltre che un errore può avere radici lontane dal contesto in cui si è verificato: lontane sia dal punto di vista temporale (un misconcetto nato tanti anni prima), sia dal punto di vista del contesto matematico.
Se questo è vero, non c'è da stupirsi allora se l'intervento tradizionale di recupero – basato com'è su un lavoro ripetitivo fatto nello stesso contesto in cui l'errore si è verificato – non dà i risultati sperati.

3.2 Scena 6: Marco

Un altro segno il cui uso improprio suggerisce la presenza di misconcetti è quello delle parentesi.
Uno degli errori più diffusi nell'uso delle parentesi è proprio quello di Marco, protagonista della sesta scena della nostra Galleria.
Marco deve moltiplicare il numero $x+1$ per $x+2$, e scrive:
$x + 1 \cdot (x + 2)$
poi però risolve:
$x + 1 \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + x + 2$
cioè opera *come se* la parentesi ci fosse.
Mi ricordo a questo proposito il commento di un'insegnante in un incontro di aggiornamento: "Sì, è vero! Anche i miei lo fanno, e io in questi casi tolgo due punti, perché ci sono due errori". Il comportamento di quest'insegnante, pur se per sua stessa ammissione privo di risultati (gli studenti insistevano nell'errore nonostante la doppia penalizzazione) è coerente con l'approccio che vede negli errori gli indicatori privilegiati di carenze a livello di conoscenze.
Ma proviamo a cambiare punto di vista, e a metterci nei panni di Marco.
Supponiamo che lo studente usi le parentesi come una stenografia personale, da utilizzare in passaggi provvisori (sono ragionamenti scritti, o meglio appuntati, per non perdere il filo del

discorso...) che verranno cancellati o comunque perderanno di senso quando avrà raggiunto il risultato. La finalità di questi segni è allora di rimarcare *a lui stesso* un ordine: è chiaro che in tale ottica le parentesi sono inutili se l'ordine delle operazioni da eseguire è percepito come naturale!
E' forse quello che succede in questo caso: Marco non *sente* il bisogno della prima parentesi perchè *vede* il numero x+1 come 'un solo' numero.
Se i passaggi non sono molti, e più che altro se le difficoltà di calcolo non sono tali da offuscare il significato della scrittura iniziale, tale scrittura viene risolta *come se* la parentesi ci fosse. La mancanza di errori conferma che l'uso della stenografia è stato efficace: non c'era proprio bisogno di segnalare quella precedenza, visto che Marco l'ha rispettata anche senza parentesi!
Se Marco ha ragionato in questo modo, in altre parole se ha costruito una concezione dell'uso delle parentesi come una stenografia personale, sarà impossibile convincere Marco che ha fatto o scritto qualcosa di sbagliato: la (naturale) correzione assumerà solo il sapore di un'inutile e ingiusta pignoleria.
Questa interpretazione, pur riconoscendo il comportamento di Marco come razionale e coerente, non implica una rinuncia all'intervento. Per intervenire in modo efficace è però necessario recuperare la funzione di comunicazione che le parentesi hanno, non limitandola alla relazione allievo-insegnante (l'allievo è convinto che l'insegnante sia in grado di capire quello che lui vuole dire: se l'insegnante non lo fa, è per cattiva volontà), ma inserendola in un'attività fra pari. Ad esempio si può pensare ad un lavoro a gruppi, in cui un gruppo scrive un'espressione, ed un altro la calcola: è chiaro che un'interpretazione diversa delle parentesi può portare a risultati diversi, quindi ad un conflitto, ed alla consapevolezza che per superare tale conflitto è necessario sciogliere l'ambiguità della scrittura accordandosi sulle regole di precedenza delle operazioni.

3.3 Scena 7: Alice

Gli errori causati dall'interpretazione distorta dei messaggi dell'insegnante sono caratterizzati dal fatto di essere sistematici, ma non necessariamente tipici. In alcuni casi l'interpretazione è estremamente personale, e quindi ancora più difficile da riconoscere.
Alice, quarta ginnasio, deve riconoscere in alcuni enunciati di teoremi qual è l'ipotesi e qual è la tesi, ma, *regolarmente*, chiama ipotesi la tesi. E' l'episodio descritto nella scena 7 della nostra Galleria, anche se in realtà Alice non interagisce con l'insegnante, ma con sua madre. Come descritto nella scena le spiego ripetutamente ed inutilmente cosa si intende per ipotesi e tesi, ma fortunatamente l'episodio non si conclude così. Finalmente smetto di spiegare e cerco di capire, attraverso alcune domande, come sta ragionando (il fatto che l'errore sia frutto di un ragionamento - e non di una risposta data a caso - è già un'interpretazione dell'insegnante, cioè un'ipotesi di lavoro, suggerita del resto dalla sistematicità dell'errore). La sua argomentazione, una volta esplicitata, è perfino convincente: *"Quando in un discorso normale, o anche nelle scienze, diciamo 'faccio un'ipotesi' poi però dobbiamo far vedere che è vera...cioè la dobbiamo dimostrare"*.
Osserviamo che anche come insegnanti di matematica ci capita di usare la parola 'ipotesi' nel senso indicato da Alice: ad esempio quando analizziamo gli errori o i comportamenti fallimentari dei nostri studenti, sottolineiamo l'importanza di fare 'ipotesi' interpretative, ipotesi che poi vanno *verificate* alla luce del feedback che riceviamo dagli allievi. Non useremmo lo stesso termine nel contesto della matematica: parleremmo invece di *congettura*. Ma questo uso di termini diversi per indicare la stessa cosa in contesti diversi ci risulta così naturale, che non riusciamo nemmeno ad immaginare che per persone 'non esperte' possa invece costituire un problema!

4. IL CURRICULUM NASCOSTO

Le interpretazioni dei messaggi dell'insegnante che l'allievo costruisce vanno a costituire quello che Silver (1985) chiama *il curriculum nascosto*, in contrapposizione al curriculum trasparente dell'insegnante. In una classe quindi si costruiscono 20, 25… curricula nascosti, uno per ogni allievo, frutto delle loro interpretazioni del curriculum trasparente. Purtroppo, osserva Silver, l'insegnante in genere pone l'attenzione solo sul curriculum trasparente, e trascura invece i curricula nascosti.
D'altra parte non è facile rendere trasparenti i curricula nascosti. La ricerca viene in aiuto, in quanto suggerisce le interpretazioni più tipiche e più diffuse.
Ad esempio è piuttosto tipico l'uso delle parentesi che fa Marco, o l'interpretazione che abbiamo descritto del segno '=' come di comando ad eseguire operazioni.
Uno dei misconcetti più citati in letteratura riguarda la moltiplicazione, e più precisamente l'idea che moltiplicando due numeri si ottenga un numero maggiore di entrambi. Analogamente per la divisione è diffusa l'idea che dividendo due numeri si ottenga un numero minore di entrambi.
Secondo un altro misconcetto molto diffuso un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione compare esplicitamente il segno "-". Quindi $-a$ è considerato negativo (a prescindere dal valore di a), mentre a è considerato positivo. Si possono ricondurre a questo misconcetto alcuni errori piuttosto tipici.

Un altro misconcetto piuttosto diffuso, purtroppo anche fra insegnanti e libri di testo, riguarda il concetto di insieme, e precisamente l'idea che gli elementi di un insieme devono avere una caratteristica comune percettibile: così non avrebbe senso parlare dell'*insieme* costituito dalla torre di Pisa, da Lewis Carroll, e dal numero 7, *a meno che* uno non riesca a trovare *prima* una proprietà che caratterizzi questi elementi, che cioè li accomuni ma non sia comune ad altri.

5, COME NASCONO I MISCONCETTI

La necessità di preoccuparsi del curriculum nascosto degli allievi porta in modo naturale ad alcune domande: come nascono i misconcetti? Più in generale, quali fattori dirigono l'interpretazione che l'allievo fa dei messaggi dell'insegnante?
Anche se i misconcetti possono essere frutto di interpretazioni estremamente personali, possiamo riconoscere nel processo che porta alla loro costruzione il ruolo di due elementi importanti, che giocano a livelli diversi e non incompatibili: i cosiddetti *modelli primitivi*, ed il linguaggio.

5.1 Modelli primitivi

Un'analisi approfondita sull'origine dei misconcetti mette in luce che in alcuni casi il soggetto fa riferimento ad un *modello primitivo tacito* del fenomeno o del concetto in questione, cioè ad un'interpretazione significativa di quella nozione matematica, che si sviluppa ad uno stadio iniziale del processo d'apprendimento (spesso suggerita in modo esplicito dall'insegnante) e che continua ad "influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell'allievo. Il termine *tacito* significa semplicemente che l'individuo non è consapevole di questa influenza, oppure, per lo meno, della sua estensione" (Fischbein, 1989, tr. it. p. 26).
Fischbein suggerisce ad esempio che la convinzione errata che il prodotto di due numeri sia maggiore di ogni fattore può derivare dal modello primitivo di moltiplicazione come addizione ripetuta. Questo modello impone un numero di restrizioni: si deve distinguere fra *operando*, che può essere un numero positivo qualsiasi, e *operatore*, che deve invece essere un numero intero (si può dire 3 volte 0,65; ma 0,65 volte 3 non ha senso). Una conseguenza

del modello dell'addizione ripetuta è appunto la proprietà che la moltiplicazione 'fa ingrandire'.
Questa ipotesi è stata confermata dai risultati di una ricerca in cui si proponevano a studenti di vari ordini di scuola i due problemi:

Problema 1
Da un quintale di grano si ottengono 0,75 quintali di farina. Quanta farina si ricava da 15 quintali di grano?

Problema 2
Un chilo di detergente viene usato per produrre 15 chili di sapone. Quanto sapone può essere fatto con 0,75 chili di detergente?

I due problemi hanno la stessa struttura, gli stessi dati numerici, e richiedono le stesse operazioni.
Ma se li analizziamo alla luce di quanto detto in precedenza, riconosciamo che nel primo problema il ruolo di operatore (cioè quel numero che indica 'quante volte' si deve sommare il primo numero) è svolto da 15, un numero intero, mentre nel secondo è svolto da 0,75. Se l'ipotesi di Fischbein è corretta, quindi, ci aspettiamo che il secondo problema presenti maggiori difficoltà per gli studenti che fanno riferimento al modello primitivo descritto sopra.
In effetti alla richiesta di scegliere l'operazione risolvente appropriata, si sono avute (a livello di scuola superiore) il 76% delle risposte corrette per il primo problema, e il 35% per il secondo (Fischbein, 1989).

Fra gli esempi di modelli primitivi discussi da Fischbein c'è anche quello relativo al concetto di insieme. Fischbein riporta i misconcetti più diffusi analizzati da Linchevski e Vinner (1988), fra i quali:

- gli elementi di un insieme devono avere a priori una caratteristica in comune;
- un insieme deve avere più di un elemento;
- elementi che si ripetono sono considerati distinti.

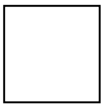
Secondo il ricercatore c'è un'interpretazione molto semplice per questi misconcetti, ed è la presenza del modello tacito di insieme come collezione di oggetti. In effetti tale modello presenta tutti i vincoli elencati sopra. Fischbein conclude osservando che il modello intuitivo "manipola da dietro le quinte il significato, l'uso, le proprietà del concetto formalmente stabilito" (Fischbein, 1989, tr. it. p. 27).

5.2 Il linguaggio

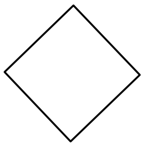
Come abbiamo visto nel capitolo precedente, il punto di vista costruttivista riconosce al linguaggio un ruolo cruciale. Questo ruolo è particolarmente evidente nel caso dei misconcetti: è chiaro infatti che il processo di interpretazione che l'allievo mette in atto quando fa matematica è fortemente influenzato dai messaggi verbali mandati dall'insegnante, dai testi che legge e che produce, dall'interazione verbale in classe.
Negli esempi fatti emerge chiaramente l'importanza di questi fattori, ed insieme la problematicità intrinseca alla mescolanza di due linguaggi, quello quotidiano e quello specifico della matematica, mescolanza inevitabile nella comunicazione in classe.
Abbiamo visto un esempio nel caso delle parole 'ipotesi' e 'tesi' descritto nella scena 7. L'errore sistematico commesso da Alice appare quasi legittimo alla luce della sua spiegazione: *"Quando in un discorso normale, o anche nelle scienze, diciamo 'faccio un'ipotesi' poi però dobbiamo far vedere che è vera...cioè la dobbiamo dimostrare".*

In generale il fatto che un termine venga usato anche nel linguaggio quotidiano con significati diversi è motivo frequente di confusione: accade così ad esempio per termini quali 'angolo', 'spigolo', 'quadrato / rombo' (cfr. Villani, 1993).

Ad esempio la figura:



è riconosciuta come quadrato, mentre la seguente (cioè la stessa ruotata):

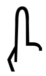


come un rombo.

6. INTERVENIRE SUL CURRICULUM NASCOSTO: LA PREVENZIONE

Le considerazioni fatte suggeriscono in modo naturale modalità di prevenzione di carattere generale. Ma è importante a mio parere chiedersi: *cosa* e *perché* vogliamo prevenire?
Coerentemente con l'approccio all'errore che abbiamo descritto nel secondo capitolo, non sono gli errori di per sé che è significativo prevenire. Per usare le parole di Popper, 'evitare errori è un ideale meschino': per di più, è un ideale che si può ottenere con un opportuno calo delle richieste! Finalità della prevenzione è piuttosto favorire l'educazione al comprendere, ed alcune scelte didattiche che incoraggiano la nascita di misconcetti sono nello stesso tempo d'ostacolo a questa comprensione.
Le modalità di prevenzione possono essere specifiche, finalizzate cioè alla prevenzione di misconcetti in un certo ambito matematico (ad esempio l'uso delle lettere, la moltiplicazione, il concetto di insieme…), oppure trasversali, nel qual caso prescindono dall'argomento matematico in gioco.
Un esempio di lavoro preventivo specifico è quello suggerito da Hershkowitz e Kieran (1980) e da Kieran (1981) nell'ambito dell'uso delle lettere.
Il percorso, sperimentato con allievi di 12-14 anni, prende avvio dalla domanda: "Cosa significa per te il segno «=»?", seguita quindi dalla richiesta di un esempio in cui questo segno viene usato. Nella maggior parte degli esempi prodotti il segno «=» collega un'operazione (a sinistra) con il suo risultato (a destra). Vengono proposte quindi delle attività per *estendere* l'uso del segno, includendo operazioni sia a sinistra che a destra dello stesso. Si comincia con la costruzione di 'uguaglianze aritmetiche', all'inizio con una sola operazione da ogni parte:
2 x 6 = 4 x 3 (la stessa operazione)
quindi:
2 x 6 = 10 + 2 (operazioni diverse)
Una volta che gli allievi hanno accettato questa forma, si passa a costruire uguaglianze prima con due, poi con più operazioni da ogni parte:
7 x 2 + 3 - 2 = 5 x 2 - 1 + 6
Queste vengono chiamate 'identità aritmetiche' per distinguerle dalle 'equazioni'.
Il concetto di equazione è introdotto successivamente a partire da identità aritmetiche costruite dagli allievi, ad esempio:
7 x 2 - 3 = 5 x 2 + 1
e quindi nascondendo un numero, all'inizio con un dito, poi con un quadratino, ed alla fine con una lettera.

Ad esempio:

7 x  - 3 = 5 x 2 + 1

E poi:

7 x □ - 3 = 5 x 2 + 1

7 x **a** - 3 = 5 x 2 + 1

Le osservazioni fatte sui modelli primitivi suggeriscono l'importanza di un insegnamento flessibile, attento a presentare uno stesso concetto o fenomeno in più contesti. Premesso questo, tali considerazioni non implicano però, a mio parere, che l'insegnante si debba sentire schiacciato dalla responsabilità di favorire misconcetti. I ricercatori infatti per lo più concordano sull'impossibilità di evitare la costruzione di stereotipi, di convinzioni errate, di modelli primitivi. Del resto abbiamo già osservato che i misconcetti possono essere un momento necessario nell'evoluzione da un certo livello di conoscenza ad uno superiore.

Fischbein sottolinea piuttosto la necessità di "dedicare molti più esperimenti alle tecniche di sviluppo che permettono agli studenti di diventare consapevoli dell'influenza delle loro restrizioni intuitive, tacite, e [...] aiutare gli studenti a costruire efficienti sistemi di controllo concettuale che avrebbero il compito di controllare l'impatto di questi modelli" (Fischbein 1989, tr. it. p. 35). Gli obiettivi della prevenzione si spostano quindi dall'evitare misconcetti a sviluppare consapevolezza e processi di controllo in relazione a misconcetti eventualmente costruiti.

Anche in ambito scolastico probabilmente i 'bravi' in matematica non sono tanto gli allievi che non commettono errori, o che sono completamente insensibili alla tentazione dei misconcetti: sono piuttosto quelli che mettono in atto processi di controllo efficienti.