CAPITOLO 3: LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

3.1 Che cos'è la geometria?

La prima domanda del questionario era proprio: "Secondo te di cosa si occupa la geometria?"
Ecco le vostre risposte:

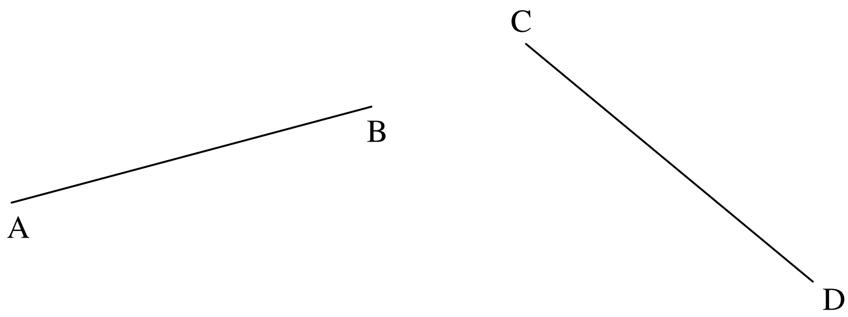
1.	Di costruzioni edilizie.
2.	Lo studio di figure piane e solide.
3.	Lo studio di figure piane e solide e la loro trasformazione nel piano e nello spazio.
4.	Applica la matematica alle figure, intese come spazio fisico in cui si può presentare la realtà.
5.	Le figure geometriche, i loro elementi, le grandezze e le figure nello spazio.
6.	La matematica che si occupa delle figure geometriche nello spazio.
7.	Misurazione dello spazio.
8.	Lo studio della misurazione dello spazio.
9.	Lo studio delle figure geometriche, ovvero dei rapporti intercorrenti tra diversi punti, diverse rette, diversi piani.
10.	Lo studio delle figure.
11.	La parte della matematica che si occupa di misurare le forme della terra.
12.	Si occupa della costruzione di figure solide e dei loro rapporti nello spazio.
13.	Si occupa di studiare lunghezze, aree, volumi, altezze di figure piane e solide.
14.	Lo studio dell'incontro nello spazio delle figure che esse formano incontrandosi in diversi punti e su diversi piani.
15.	La capacità di orientamento nello spazio.
16.	Si occupa di definire le figure nel piano e nello spazio.
17.	Studia le figure solide.
18.	Disposizione dei punti nello spazio.
19.	Non si può definire: è un concetto primitivo (come quello di punto, retta, piano).

In realtà, anche se la storia della geometria ha avuto inizio più di 4000 anni fa, una risposta davvero soddisfacente a questa domanda è stata data solo alla fine dell'800, grazie alla sistemazione realizzata dal matematico tedesco Felix Klein (1872), a sua volta resa possibile dagli sviluppi della matematica di quel secolo, in particolare dalla creazione delle cosiddette *geometrie non euclidee*.

Una geometria non euclidea è una geometria che condivide i primi 4 assiomi di Euclide, ma non il quinto, famoso appunto come 'postulato delle parallele': per molto tempo i matematici furono convinti che tale postulato, meno intuitivo ed immediato dei precedenti, fosse in realtà conseguenza degli altri. Gli innumerevoli tentativi di dimostrarlo a partire dagli altri postulati furono fallimentari, anzi, portarono in realtà all'individuazione di 'geometrie' in cui valevano i primi 4 postulati ma non il 5°. A tali geometrie viene dato il nome di 'geometrie non euclidee'.

Nei nostri questionari una delle risposte più frequenti è stata che "la geometria si occupa delle proprietà delle figure geometriche".
E' anche la caratterizzazione della geometria che si trova in molti testi scolastici, dove appunto si definisce la geometria come "la scienza che studia le proprietà delle figure geometriche".
Ma a quali "proprietà" ci si riferisce?
Ad esempio in geometria si studia la distanza del vertice di un triangolo disegnato sulla lavagna da determinate rette, come il lato opposto (quella che poi chiamiamo altezza del triangolo), però non si studia la distanza del vertice da altre rette, come quella individuata dal bordo della lavagna.

Dobbiamo quindi definire meglio quali proprietà delle figure sono oggetto di studio in geometria. Per farlo, riprendiamo alcune cose dette nel secondo capitolo, dove abbiamo usato spesso il termine "figure uguali" o "congruenti".
Cosa intendevamo per figure 'uguali'?
Siamo partiti dal caso dei segmenti, ed abbiamo usato il termine intuitivo "sovrapponibili": cioè abbiamo definito due segmenti 'uguali' o 'congruenti' se quando 'porto' un estremo del secondo segmento (il punto C) a coincidere con un estremo del primo (il punto A), in modo che i due segmenti giacciano sulla stessa retta e che gli estremi B e D stiano dalla stessa parte rispetto ai punti A, anche l'estremo D coincide con B.



Questa idea di "sovrapponibilità" e di "movimento rigido" può essere definita in modo rigoroso, e inquadrata in un discorso più generale: quello che ha per oggetto le 'trasformazioni del piano'.

Si definisce **trasformazione del piano** una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei punti del piano e sé stesso, cioè una funzione che fa corrispondere ad un punto del piano P un punto P': si dice anche che la trasformazione 'manda' P in P'.
Mediante una trasformazione geometrica quindi una figura F viene 'trasformata' in un'altra figura, F': quella costituita dai punti in cui vengono 'mandati' i punti della figura di partenza.

Fra le trasformazioni del piano sono particolarmente importanti i movimenti rigidi di cui parlavamo prima.
Si definisce 'movimento rigido', o **isometria**, una trasformazione che conserva le distanze[1]. Questo vuol dire che se A e B sono due punti qualsiasi del piano, e A' e B' i loro corrispondenti, si ha che:
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$

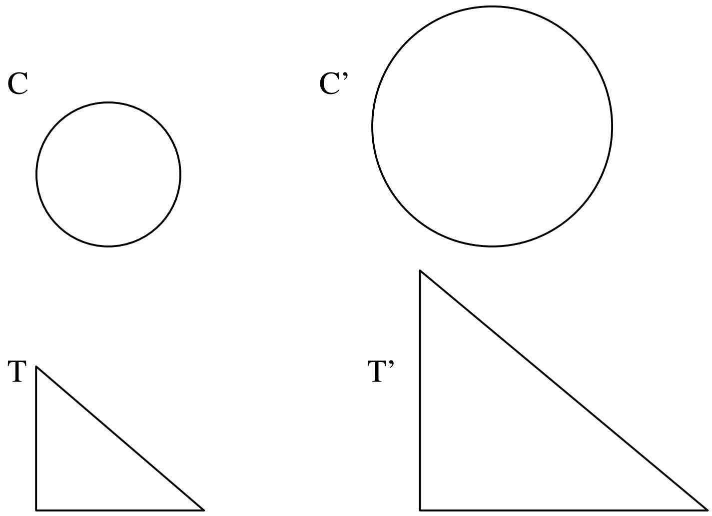
Nel caso dell'isometria le due figure – quella di partenza e quella trasformata – sono congruenti.

La geometria di cui abbiamo parlato finora studia le proprietà delle figure geometriche che sono *invarianti per isometrie*: cioè che si conservano attraverso movimenti rigidi.
Ad esempio se disegno sulla lavagna un triangolo e ne considero la distanza del vertice dalla retta individuata dal bordo della lavagna, questa non è una proprietà geometrica, perché non è invariante per isometrie.

Ma in realtà abbiamo considerato nello studio delle nostre figure geometriche anche proprietà più generali di quelle che si conservano per isometrie, come la *forma* di una figura.

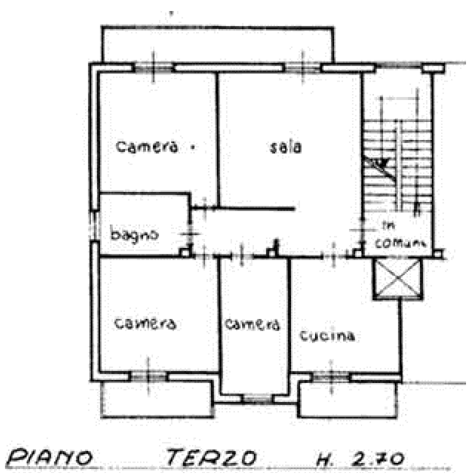
[1] Qualcuno forse avrà notato che c'è un circolo vizioso fra la definizione di lunghezza di un segmento e quella di movimento rigido, dato che la distanza fra due punti A e B si definisce come la lunghezza del segmento AB. In effetti quello di movimento rigido è un concetto primitivo, cioè viene definito implicitamente dagli assiomi.

Ad esempio riconosciamo che le figure C e C’, così come le figure T e T’ (che pure non sono sovrapponibili) hanno però la stessa forma:



Possiamo pensare quindi a trasformazioni più generali delle isometrie, trasformazioni che conservano la forma, pur non conservando necessariamente le distanze.
La riduzione in scala di un disegno, o l’ingrandimento di una fotografia, hanno proprio questa proprietà: in questi casi si parla di ‘fattore di scala’, e si scrive ad esempio 1:20, intendendo che se la lunghezza di un segmento del disegno è 1 (rispetto ad una qualsiasi unità di misura), la lunghezza del segmento corrispondente nell’originale è 20 (rispetto alla stessa unità di misura).

<u>Esercizio 3.1:</u>
Nel disegno è riportata la piantina di un appartamento. La scala è 1:200.
E’ possibile utilizzare per una delle camere un armadio lungo 4m?
Quanto misura la lunghezza della parete della sala dove c’è la finestra?
Dovendo disegnare e ritagliare le sagome dei mobili con cui arredare l’appartamento, di quali dimensioni disegneresti un letto singolo?



Le trasformazioni che conservano la forma delle figure si chiamano *similitudini*. Più precisamente una similitudine è una trasformazione del piano che moltiplica (o divide[2]) tutte le distanze per uno stesso numero positivo k. In altre parole, se chiamiamo A’ e B’ i trasformati di due punti A e B qualsiasi, si ha che:

$\overline{A'B'} = k\overline{AB}$

O anche:

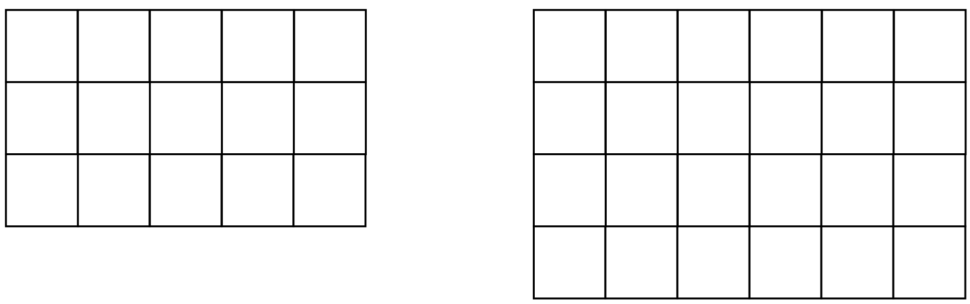
d(A’,B’)= k d(A,B)

Osserviamo che se il fattore k per cui moltiplico le distanze è uguale a 1, ritroviamo le isometrie. Quindi possiamo dire che l’insieme delle isometrie è un sottinsieme di quello delle similitudini.

Si può dimostrare che le similitudini – definite come sopra - conservano le ampiezze degli angoli, e quindi trasformano rette perpendicolari in rette perpendicolari, …e quindi trasformano rettangoli in rettangoli, parallelogrammi in parallelogrammi, un poligono regolare in un poligono regolare.
In altre parole, le figure geometriche che abbiamo descritto nel primo capitolo rimangono tali dopo una similitudine.
Inoltre se la figura geometrica F’ è la trasformata della figura F mediante una similitudine di fattore k, il rapporto fra le aree di F’ e F è uguale a k^2.

La geometria che studia le proprietà delle figure invarianti per similitudini si chiama *Geometria simile*.
La geometria che studia le proprietà delle figure invarianti per isometrie si chiama *Geometria metrica*: in alcuni testi viene chiamata Geometria euclidea, ma in realtà Euclide nei suoi Elementi tratta anche le similitudini.

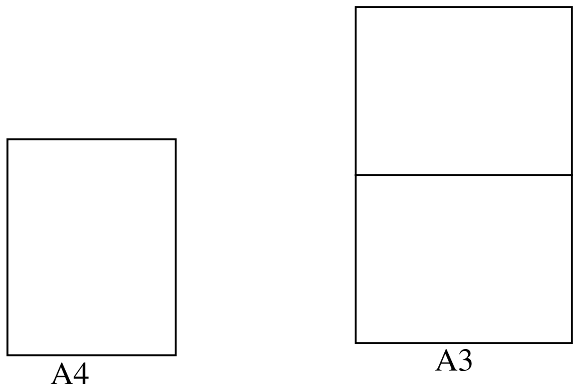
Esercizio 3.2:
Nel linguaggio quotidiano parliamo di forma ‘quadrata’, ‘circolare’, ecc.
Parliamo anche di ‘forma rettangolare’.
Ma due rettangoli hanno la sempre la stessa forma, cioè sono sempre simili?
Ad esempio, i rettangoli disegnati qui sotto sono simili?



Esercizio 3.3:
Il formato A4 che utilizziamo per la stampa o per le fotocopie corrisponde alle dimensioni di un rettangolo che ha questa proprietà:

[2] In realtà potremmo limitarci a dire ‘moltiplica per un numero positivo k’, e considerare anche la possibilità che k sia minore di 1.

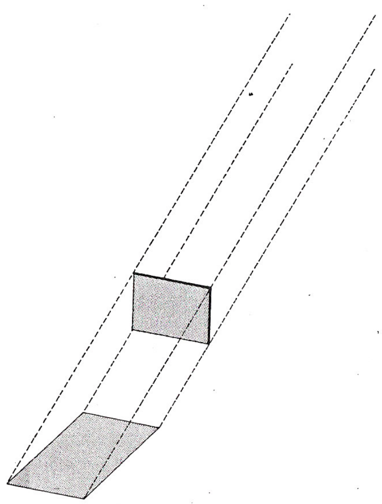
- se lo raddoppiamo mettendo insieme i due lati più lunghi (formato A3), otteniamo un rettangolo simile a quello di partenza.



Con queste informazioni sapete ricostruire qual è il fattore di scala che permette di passare dalle dimensioni di un foglio A4 a quelle di un foglio A3 (cioè quel numero che in una fotocopiatrice vi indica il fattore di ingrandimento)?

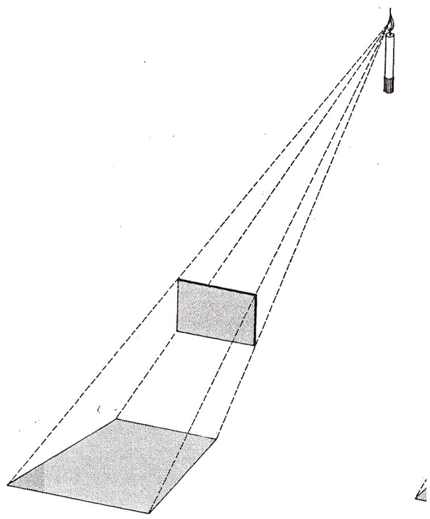
Ci si può chiedere ancora: ma esistono trasformazioni più generali delle similitudini, cioè trasformazioni che non conservano in generale la forma delle figure, ma che conservano altre proprietà?
La risposta è sì. Non solo, esempi di queste trasformazioni più generali si riconoscono in fenomeni che si osservano nella realtà.
Partiamo proprio da questi esempi.

Pensiamo al fenomeno delle ombre prodotte dalla luce del sole. Se immaginiamo un oggetto piano, ad esempio un rettangolo, la sua ombra conserverà alcune delle proprietà del rettangolo, ma non altre:



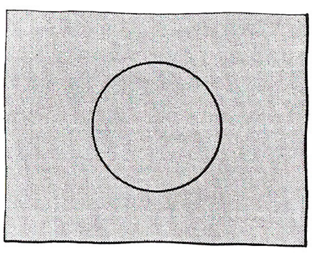
Questo tipo di trasformazione si chiama *affinità*: non conserva l'ampiezza degli angoli, ma trasforma rette parallele in rette parallele. Quindi in generale un rettangolo sarà trasformato in un parallelogramma.
La geometria che studia le proprietà delle figure invarianti per affinità si chiama *geometria affine*: in tale geometria non ha quindi senso parlare di rettangoli, o quadrati, o rombi, mentre ha senso parlare di parallelogrammi; inoltre non ha senso parlare di rette perpendicolari, mentre ha senso parlare di rette parallele.
Una similitudine si può vedere come una particolare affinità.

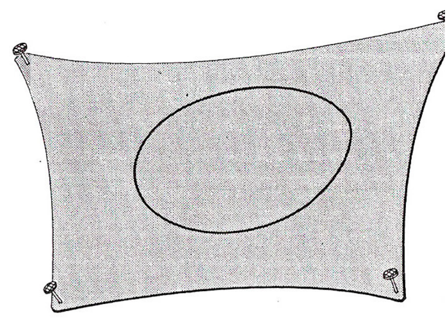
Un esempio di trasformazione ancora più generale è quella che proietta un'ombra da una sorgente di luce vicina:



In questo caso non viene conservato nemmeno il parallelismo, però a rette corrispondono ancora rette. Questo tipo di trasformazione si chiama *proiettività*, e la geometria che studia le proprietà delle figure invarianti per proiettività si chiama *geometria proiettiva*. Nella geometria proiettiva ha quindi senso parlare di rette, ma non di rette parallele; di quadrilateri, ma non di parallelogrammi.
L'affinità si può vedere come una proiettività particolare.

Con la geometria proiettiva sembrerebbe di aver toccato il massimo della generalità.
Ma non è così. Si possono considerare trasformazioni del piano in cui a rette non corrispondono più rette: trasformazioni cioè che conservano solo proprietà più generali.
Consideriamo ad esempio la deformazione cui è sottoposta una figura disegnata su un foglio di gomma:





La circonferenza del disegno di partenza è trasformata in una curva molto diversa, che dipende naturalmente dal modo in cui 'deformo' il foglio di gomma. Rimane però invariato il fatto che questa curva è *chiusa* come lo era la circonferenza, cioè la figura di partenza. Inoltre i punti che erano interni alla figura di partenza vengono ‘mandati’ in punti che sono interni alla figura di arrivo: cioè rimane invariata la proprietà di essere ‘dentro’ o fuori’ la figura.

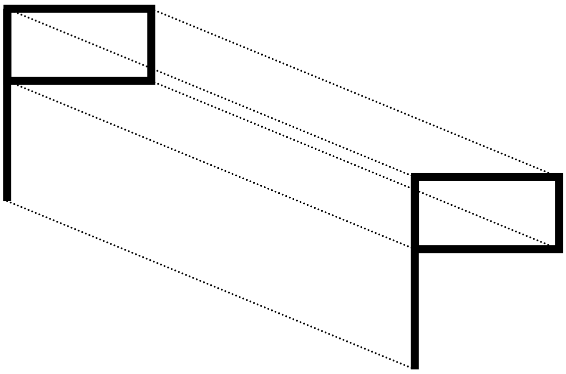
In matematica la deformazione del foglio di gomma corrisponde a trasformazioni che si chiamano ‘continue’: ma non ci interessa qui definire questo concetto rigorosamente. A livello intuitivo possiamo dire che in questa geometria, detta *topologia*, una figura chiusa viene trasformata in una figura chiusa.
I matematici dicono che dal punto di vista topologico una tazzina di caffè è la stessa cosa di un frate (inteso come la ciambella con il buco), perché con una deformazione continua è possibile trasformare l’una nell’altra.
Anche se la topologia è oggetto di studi solo a livello superiore, va detto che alcune classificazioni tipiche di tale geometria corrispondono alla prima esperienza geometrica ‘naturale’ (cioè non scolarizzata) del bambino: la percezione di caratteristiche di oggetti quali aperto/chiuso, dentro/fuori, così come l’uso delle relative parole, precedono di gran lunga la percezione di caratteristiche geometriche più raffinate e l’uso dei relativi termini.

Siamo a questo punto in grado di comprendere la risposta data dal matematico Felix Klein alla domanda “Che cos’è la geometria?”.
La geometria, o meglio una particolare geometria, è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni. La geometria cosiddetta metrica o euclidea[3] si può definire come la geometria che studia le proprietà delle figure che si mantengono per isometrie; la geometria simile come la geometria che studia le proprietà delle figure che si mantengono per similitudini; la geometria affine studia le proprietà delle figure che si mantengono per affinità; la geometria proiettiva studia le proprietà delle figure che si mantengono per proiettività; infine la topologia è la geometria che studia le proprietà delle figure che si mantengono per trasformazioni ‘continue’.
Ogni geometria ha le sue ‘parole’, nel senso che classifica le figure in base a caratteristiche invarianti per le trasformazioni che le corrispondono: via via che si passa dalla geometria euclidea alla topologia, questo lessico si riduce, mentre si allarga il tipo di trasformazione consentita.

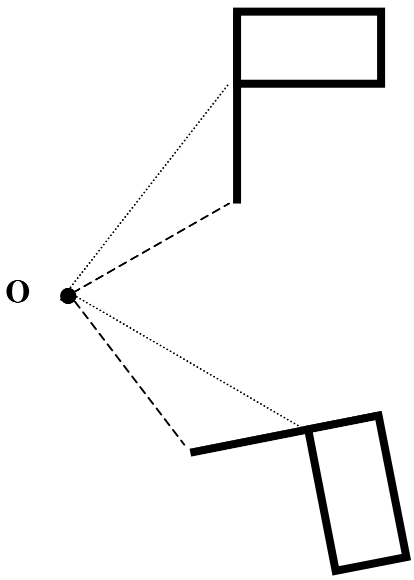
3.2 Le isometrie

Ricordo che abbiamo definito isometrie le trasformazioni del piano che conservano le distanze.
In geometria si definiscono alcuni tipi particolari di isometrie:
a) Le *traslazioni*
In una traslazione ogni punto del piano viene spostato nella stessa direzione e verso, e secondo una stessa distanza (in matematica si dice anche: direzione, verso, modulo).
Ecco l’effetto di una traslazione su una figura (bandierina):

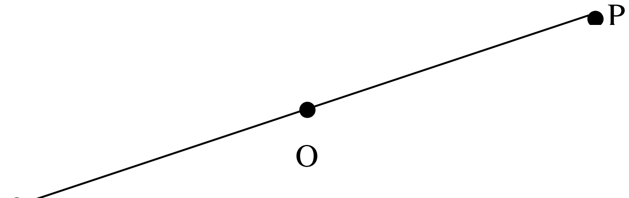
[3] ‘Cosiddetta’ perché come ho già detto in realtà negli Elementi di Euclide vengono trattate anche le similitudini.



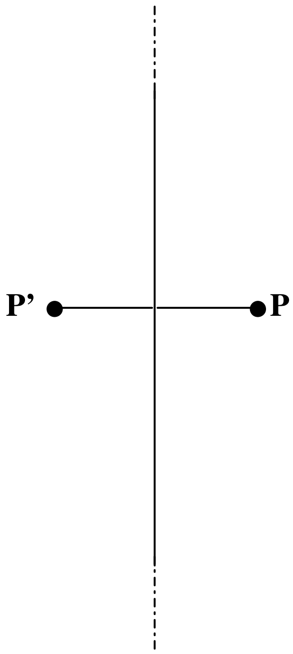
b) Le *rotazioni* (di un certo angolo d'ampiezza α) attorno ad un punto O
In una rotazione il punto O rimane 'fisso' (cioè al punto O corrisponde lo stesso punto O), ed ogni punto P del piano viene mandato in un punto P' tale che i segmenti OP e OP' sono congruenti, e l'angolo POP' ha ampiezza α.
Ecco l'effetto di una rotazione di 90° rispetto al punto O sulla bandierina:



Una rotazione di 180° attorno ad un punto O si chiama anche *simmetria centrale* di centro O.
In questo tipo di rotazione ogni punto del piano P viene infatti mandato nel suo simmetrico rispetto al punto O, cioè nel punto P' che giace sulla semiretta opposta ad OP e tale che:
d (P', O) = d (P, O).

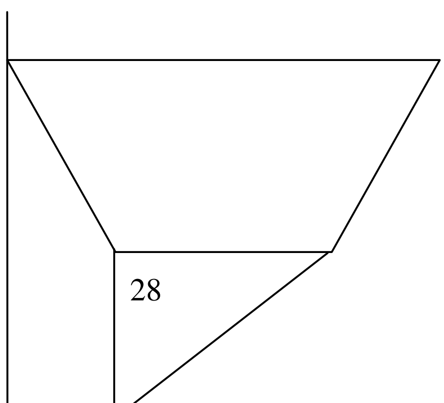


c) Le simmetrie rispetto ad un asse, dette *simmetrie assiali*
In una simmetria assiale di asse una retta r, ogni punto P del piano viene mandato in un punto P' che sta nell'altro semipiano individuato dalla retta r, ed è tale che:
d (P, r) = d (P', r)



Osserviamo che eseguendo una dopo l'altra due isometrie (in matematica si dice: 'componendo due isometrie') si ottiene ancora un'isometria: quindi sarà ancora un'isometria la composizione di una traslazione con una rotazione, di una rotazione con una simmetria assiale, ecc.

<u>Esercizio 3.4:</u>
Disegna la figura F', trasformata della figura F mediante la simmetria assiale di asse r:



F

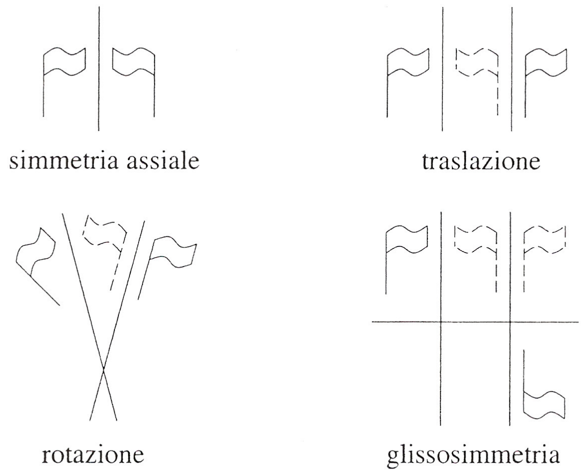
r

<u>Esercizio 3.5:</u>
Un punto del piano P si dice ‘fisso’ rispetto ad una trasformazione se il trasformato di P è lo stesso P, cioè e P’=P.
Ci sono punti fissi in una traslazione?
E in una rotazione?
Ed in una simmetria assiale?

Si può dimostrare che le simmetrie assiali hanno un ruolo molto importante all’interno delle isometrie.
Più precisamente si può dimostrare che:
- le traslazioni si possono ottenere componendo due simmetrie assiali con assi paralleli
- le rotazioni si possono ottenere componendo due simmetrie assiali con assi incidenti

Se si eseguono invece tre simmetrie assiali si ottiene un’isometria definita *glissosimmetria* (cioè simmetria con scivolamento): per quanto detto sopra una glissosimmetria si può vedere come composizione di una traslazione con una rotazione.
Si dimostra infine che un’ isometria del piano è necessariamente una trasformazione di uno dei seguenti tipi:
- simmetrie assiali
- traslazioni
- rotazioni
- glissosimmetrie

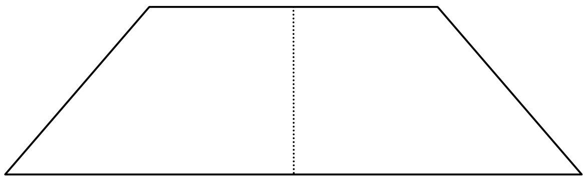
Mettendo insieme tutti questi risultati, si conclude che a partire dalle simmetrie assiali (naturalmente scegliendo opportunamente gli assi) si possono ottenere tutte le isometrie del piano. Ecco perché le simmetrie assiali sono particolarmente importanti.
Nel disegno sono evidenziati gli assi di simmetria delle simmetrie assiali dalla cui composizione si ottengono: una traslazione (assi paralleli), una rotazione (assi incidenti), una particolare glissosimmetria (vista come composizione di 3 simmetrie assiali).



3.3 Assi di simmetria di una figura geometrica

Riprendiamo ora lo studio delle figure geometriche che avevamo iniziato nel primo paragrafo, andando a vedere l'effetto che vari tipi di isometria hanno su tali figure.

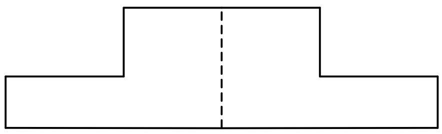
Consideriamo ad esempio un trapezio isoscele:



Se noi eseguiamo una simmetria assiale rispetto alla retta tratteggiata in figura, la parte 'destra' del trapezio si scambia con la sinistra, ed in definitiva la figura trasformata risulta essere la stessa.

Analogamente per la figura disegnata qui sotto:

Se noi eseguiamo una simmetria assiale rispetto alla retta tratteggiata in figura, la parte 'destra' del trapezio si scambia con la sinistra, ed in definitiva la figura trasformata risulta essere la stessa.

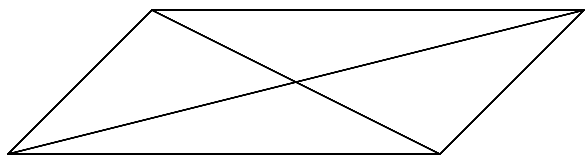


Potremmo anche dire che se ritagliamo la nostra figura e la pieghiamo lungo la linea tratteggiata (cioè l'asse di simmetria), i due pezzi della figura così ottenuta combaciano perfettamente.

In generale data una figura geometrica F, diciamo che F ha r come **asse di simmetria** (o anche: che F possiede una simmetria assiale rispetto alla retta r) se la figura F', trasformata di F mediante la simmetria assiale di asse r, coincide con F.

Analogamente diciamo che la figura F ha un **centro di simmetria** O, se la figura F', trasformata di F mediante la simmetria centrale di centro O, coincide con F.
Ad esempio consideriamo il parallelogramma:

Il punto O incontro delle diagonali è centro di simmetria per il parallelogramma, cioè il parallelogramma è simmetrico rispetto al punto O: infatti se immagino di eseguire la simmetria centrale rispetto ad O, ogni punto P del parallelogramma viene mandato in un punto P' che sta ancora sul parallelogramma.

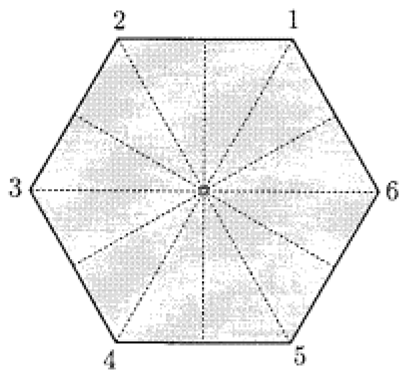


Esercizio 3.6:
Riconosci quali fra le lettere del nostro alfabeto hanno assi di simmetria o un centro di simmetria.

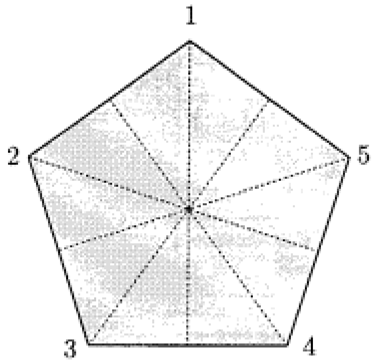
A B C D E F G H I L M N O P Q R S T U V Z

La nozione di 'assi di simmetria' permette di caratterizzare **i poligoni regolari**.
Più precisamente:
Un poligono regolare di n lati ha n assi di simmetria.
In altre parole: un poligono regolare ha tanti assi di simmetria quanti sono i lati.

Per descrivere tali assi bisogna distinguere due casi: n pari o n dispari.
Se n è pari (ad esempio il caso dell'esagono, dove n=6), gli n assi di simmetria congiungono i vertici opposti, oppure i punti medi di due lati opposti:



Se n è dispari (ad esempio il caso del pentagono, dove n=5), gli n assi di simmetria passano per un vertice e per il punto medio del lato opposto.



Un poligono regolare ha anche n rotazioni, che riportano il poligono su se stesso.
Le n rotazioni hanno centro nel centro del poligono, e ampiezza i multipli di 360°/n, da 360°/n a 360°.
Ad esempio se n=6 (esagono) le 6 rotazioni sono rispettivamente di 60°, di 120°, di 180°, di 240°, di 300°, di 360°.

L'idea di assi di simmetria di una figura ci permette anche una classificazione più sistematica rispetto a quella che abbiamo visto nel primo capitolo.
In particolare la classificazione dei quadrilateri era piuttosto 'disordinata', nel senso che a volte nella definizione interveniva la lunghezza dei lati (ad esempio per definire il rombo), altre volte l'ampiezza degli angoli (per definire il rettangolo), altre volte il parallelismo (per definire il parallelogramma o il trapezio).

Ma cominciamo dai triangoli.
Si può dimostrare il
Teorema- Un triangolo è:
- equilatero se e solo se possiede tre simmetrie assiali, cioè ha tre assi di simmetria
- isoscele se e solo se possiede una simmetria assiale, cioè ha un asse di simmetria
- scaleno se e solo se non possiede alcuna simmetria assiale, cioè non ha assi di simmetria.

<u>Esercizio 3.7:</u>
Disegna gli assi di simmetria di un triangolo isoscele e di un triangolo equilatero.

Passando ai quadrilateri, abbiamo il seguente
Teorema- Un quadrilatero è:
-un quadrato se e solo se possiede 4 simmetrie assiali (e una simmetria centrale)
-un rettangolo se e solo se possiede 2 simmetrie assiali con assi passanti per i punti medi delle coppie di lati opposti (e una simmetria centrale)
- un rombo se e solo se possiede 2 simmetrie assiali con assi passanti per le coppie di vertici opposti (e una simmetria centrale)
- un trapezio isoscele se e solo se possiede una simmetria assiale con asse passante per i punti medi di una delle due coppie di lati opposti (che di conseguenza risultano paralleli)
- un parallelogramma se e solo se possiede una simmetria centrale con centro nel punto di intersezione delle due diagonali.

<u>Esercizio 3.8:</u>
Disegna gli assi di simmetria:

a) di un quadrato
b) di un rettangolo
c) di un rombo
d) di un trapezio isoscele
In ogni caso riconosci se c'è anche un centro di simmetria: in caso affermativo, individualo.

Esercizio 3.9:
Disegna un poligono – che non sia un quadrilatero - che abbia un centro di simmetria.

3.4 Allora, di cosa si occupa la geometria?

Riprendiamo a questo punto le risposte riportate nel primo paragrafo.
Le possiamo raggruppare per tipologia:

Tipologia I	
2.	Lo studio di figure piane e solide.
3.	Lo studio di figure piane e solide e la loro trasformazione nel piano e nello spazio.
4.	Applica la matematica alle figure, intese come spazio fisico in cui si può presentare la realtà.
5.	Le figure geometriche, i loro elementi, le grandezze e le figure nello spazio.
6.	La matematica che si occupa delle figure geometriche nello spazio.
9.	Lo studio delle figure geometriche, ovvero dei rapporti intercorrenti tra diversi punti, diverse rette, diversi piani.
10.	Lo studio delle figure.
16.	Si occupa di definire le figure nel piano e nello spazio.
17.	Studia le figure solide.
12.	Si occupa della costruzione di figure solide e dei loro rapporti nello spazio.
14.	Lo studio dell'incontro nello spazio delle figure che esse formano incontrandosi in diversi punti e su diversi piani.
18.	Disposizione dei punti nello spazio.
Tipologia II:	
13.	Si occupa di studiare lunghezze, aree, volumi, altezze di figure piane e solide.
7.	Misurazione dello spazio.
8.	Lo studio della misurazione dello spazio.
Tipologia III:	
11.	La parte della matematica che si occupa di misurare le forme della terra.
1.	Di costruzioni edilizie.
Tipologia IV:	
15.	La capacità di orientamento nello spazio.
Tipologia V:	

19.	Non si può definire: è un concetto primitivo (come quello di punto, retta, piano).

Vi propongo qui alcuni commenti, ma ben vengano opinioni diverse.
Il primo gruppo di risposte fa riferimento alle proprietà delle figure, nel piano o nello spazio. E' il tipo di risposta da cui siamo partiti per descrivere il punto di vista 'moderno' sulla geometria, ben rappresentato dal matematico Felix Klein.
La seconda tipologia di risposte descrive altri aspetti della geometria che abbiamo chiamato metrica (e che qualcuno chiama euclidea): quelli legati alla misurazione di lunghezze, aree, volumi.
La terza tipologia fa riferimento in realtà *non* all'oggetto di studio della geometria, ma alle possibili applicazioni che hanno i risultati della geometria in altri contesti: questa distinzione è molto chiara ai giorni nostri, ma non lo era affatto migliaia di anni fa, quando è nata la geometria.
Anche la quarta tipologia non fa riferimento in realtà all'oggetto di studio della geometria, ma alle possibili motivazioni per insegnare la geometria a bambini piccoli.
Infine la quinta tipologia, cioè la risposta 19. Mi sembra che rifletta il disagio di definire una disciplina che 'non è in grado' di definire gli elementi a partire dai quali costruisce tutto il resto: punto, retta, piano, … Ma forse vuol anche dire che la geometria la conosciamo a posteriori, 'implicitamente', dopo che abbiamo visto i suoi assiomi, i suoi teoremi, le sue definizioni, …, e forse anche i suoi cambiamenti nel tempo. Solo allora, cioè con uno sguardo retrospettivo e dall'alto, possiamo effettivamente descrivere l'opera di chi ci ha preceduto, e quindi le varie posizioni sulla geometria.

APPENDICE
La geometria nelle Indicazioni per il curricolo

Per la scuola primaria fra i *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria troviamo* i riferimenti alla geometria sono evidenziati in neretto[4]:

L'alunno sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, anche grazie a molte esperienze in contesti significativi, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato siano utili per operare nella realtà.
Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.
Percepisce e rappresenta forme, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo, utilizzando in particolare strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura.
Utilizza rappresentazioni di dati adeguate e le sa utilizzare in situazioni significative
per ricavare informazioni.
Riconosce che gli oggetti possono apparire diversi a seconda dei punti vista.
Descrive e classifica figure in base a caratteristiche geometriche e utilizza modelli concreti di vario tipo anche costruiti o progettati con i suoi compagni.
Affronta i problemi con strategie diverse e si rende conto che in molti casi possono ammettere più soluzioni.
Riesce a risolvere facili problemi (non necessariamente ristretti a un unico ambito) mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati e spiegando a parole il procedimento seguito.
Impara a costruire ragionamenti (se pure non formalizzati) e a sostenere le proprie tesi, grazie ad attività laboratoriali, alla discussione tra pari e alla manipolazione di modelli costruiti con i compagni.
Impara a riconoscere situazioni di incertezza e ne parla con i compagni iniziando a usare le espressioni "è più probabile", "è meno probabile" e, nei casi più semplici, dando una prima quantificazione.

E fra gli Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria il riferimento alla geometria lo troviamo nella parte denominata "Spazio e figure", ma anche "Relazioni, misure, dati e previsioni":

Spazio e figure
– Descrivere e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri.
– Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria).
– Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti.
– Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
– Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
– Riprodurre in scala una figura assegnata (utilizzando ad esempio la carta a quadretti).

[4] Non li ho stralciati dal testo perché sono importanti anche per la geometria le indicazioni di carattere trasversale sull'attività di risoluzione di problemi e sull'importanza dello sviluppo di un atteggiamento positivo.

– Determinare il perimetro di una figura.
– Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione.
Relazioni, misure, dati e previsioni
(…)
– Conoscere le principali unità di misura per lunghezze, angoli, aree, volumi/capacità, intervalli temporali, masse/pesi e usarle per effettuare misure e stime.
– Passare da un'unità di misura a un'altra, limitatamente alle unità di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario.
(…)
– Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure.

Per la scuola dell'infanzia le nuove indicazioni non riconoscono uno spazio specifico alla matematica (aspetto questo criticato dai matematici), che si trova ad essere 'inserita' soprattutto nell'area "La conoscenza del mondo", ma che trova uno spazio anche all'interno delle altre aree:
- Il sé e l'altro
- Il corpo e il movimento
- Linguaggi, creatività, espressione
- I discorsi e le parole
- La conoscenza del mondo